

Untersuchungen
zur Implementierung von Strahlungstransport
im SPH-Formalismus

Diplomarbeit
vorgelegt von

Erik Schnetter

Angefertigt

am Institut für Astronomie und Astrophysik
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

April 1998

Meinen Eltern gewidmet

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Physikalische Grundlagen	3
1.1 Hydrodynamik	3
1.1.1 Allgemeines zum Lagrange-Bild	3
1.1.2 Die Kontinuitätsgleichung	4
1.1.3 Die Euler-Gleichung	5
1.1.4 Die Energiegleichung	5
1.1.5 Zustandsgleichungen	6
1.2 Strahlung und Strahlungstransport	6
1.2.1 Transportgleichung	7
1.2.2 Motivation der Näherungen	8
1.2.3 Eine Umformulierung	9
1.2.4 Darstellung der Richtungscharakteristik	10
1.2.5 Darstellung des Spektrums	12
1.2.6 Ergebnis	14
1.2.7 Photonen als ideales Gas	14
1.2.8 Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Materie	15
1.2.9 Oberflächen, Abstrahlung, optisch dünne Gebiete	16
1.3 Strahlungs-Hydrodynamik	17
1.4 Zeitskalen in der Strahlungs-Hydrodynamik	18
2 Der SPH-Formalismus	21
2.1 Grundlagen von SPH	21
2.1.1 Die SPH-Approximation	21
2.1.2 Diskussion der Qualität der Näherungen	23
2.1.3 Ableitungen	24
2.1.4 Die Volumengleichung	25
2.2 Einfache Hydrodynamik im SPH-Formalismus	26
2.2.1 Erhaltungsgrößen	27
2.2.2 Künstliche Viskosität	29
2.2.3 Höhere Ableitungen	30
2.3 Strahlung im SPH-Formalismus	30
2.3.1 Darstellung des Strahlungsfeldes	30
2.3.2 Die Zeitentwicklungsgleichungen	31

2.3.3	Erhaltungsgrößen	32
2.3.4	Flußbegrenzung	33
2.3.5	Oberflächen	33
3	Implementierung	37
3.1	Numerische Darstellung der SPH-Größen	37
3.1.1	Größen der SPH-Darstellung	37
3.1.2	Numerische Auswertung einer SPH-Darstellung	38
3.2	Numerische Behandlung von Anfangswertproblemen	38
3.2.1	Explizite Verfahren	39
3.2.2	Steife Differentialgleichungen	40
3.2.3	Implizite Verfahren	41
3.2.4	Steife Differentialgleichungen in der Strahlungs-Hydrodynamik . . .	42
3.2.5	Implizite Integratoren für das SPH-Verfahren	43
4	Tests	45
4.1	Das Stoßrohr	45
4.1.1	Aufbau des Stoßrohres	45
4.1.2	Qualitative Beschreibung des gesamten Stoßrohres	45
4.1.3	Analytische Lösung ohne Strahlung	46
4.1.4	Simulation ohne Strahlung	48
4.1.5	Simulation mit Strahlung	51
4.1.6	Quantitative Simulation der Stoßfront mit Strahlung	54
4.1.7	Zusammenfassung	58
5	Zusammenfassung	59
A	Anmerkungen zur Notation	61
	Literaturverzeichnis	63

Einleitung

Die Bewegung astrophysikalischer Objekte wird häufig von der Gravitation dominiert. Da die Wirkung des Elektromagnetismus wegen der Ladungsneutralität großer Objekte auf kurzreichweitige Dipol- und höhere Momente beschränkt ist, ist die Gravitation die einzige effektive langreichweitige Wechselwirkung.

Im Inneren von ausgedehnten Objekten können Dipolkräfte wie Magnetismus und auch Druckkräfte eine wesentliche Rolle spielen. Gasscheiben, die um einen Zentralkörper rotieren, werden beispielsweise durch Magnetohydrodynamik im Gravitationsfeld dieses Zentralkörpers beschrieben. Wenn diese ausgedehnten Objekte heiß oder dünn sind, kommen Effekte durch elektromagnetische Strahlung zum Tragen. Diese sind vor allem Energietransport von heißeren in kältere Gebiete und Druck, der durch die Strahlung erzeugt wird.

Ein anderer Grund, der elektromagnetische Strahlung für Astronomen interessant macht, ist die Tatsache, daß ebendiese Strahlung die überwiegende Mehrzahl, oft die einzigen Daten über Objekte außerhalb des Sonnensystems liefert. Deshalb ist die Entstehung von Strahlung im Inneren von Objekten und der Transport zu deren Oberfläche ein nicht unwichtiges Forschungsgebiet.

Die Gleichungen der Hydrodynamik sind leider so komplex, daß sie nur in den einfachsten Fällen analytisch gelöst werden können. Magnetohydrodynamische Probleme oder Probleme mit Strahlungstransport sind nur nach Näherungen analytisch zugänglich. Glücklicherweise gibt es seit gut dreißig Jahren ständig bessere Verfahren, um solche Probleme auf Rechnern numerisch zu lösen.

Eines dieser Verfahren, das besonders in der Astrophysik zunehmend Anwendungen findet, ist der SPH-Formalismus. SPH, engl.: "Smoothed Particle Hydrodynamics", heißt auf deutsch „Hydrodynamik mit ausgeschmierten Teilchen“. Dies ist eine Diskretisierungsmethode, durch die partielle Differentialgleichungen mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen angenähert werden können. Dadurch kann dann die Zeitentwicklung eines Systems mit numerischen Standardmethoden gelöst werden.

Bisherige Arbeiten zur Lösung strahlungshydrodynamischer Probleme im SPH-Formalismus beschränken sich auf den Grenzfall optisch dünner Materie, in dem die erzeugte Strahlung das betrachtete Gebiet instantan verläßt.¹ Diese Diplomarbeit untersucht, wie Effekte der Strahlung in optisch dicker Materie in die Methoden des SPH-Formalismus integriert werden können.

¹Lucy (1977) bildet eine Ausnahme. Er nimmt optisch dicke Materie an, vernachlässigt aber den Strahlungsdruck.

Kapitel 1

Physikalische Grundlagen

1.1 Hydrodynamik

Der SPH-Formalismus wird in der Astrophysik hauptsächlich auf hydrodynamische Probleme angewandt. Um eine Einführung in diese Domäne von SPH zu geben, werden in diesem Abschnitt die Grundlagen der Hydrodynamik wiederholt, deren Inhalt nach Landau und Lifschitz (1991) das Studium der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen bildet.

Der Zustand gasförmiger oder flüssiger Materie im thermodynamischen Gleichgewicht kann durch die Feldgrößen Dichte $\varrho(t, \mathbf{x})$, Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ und Druck $p(t, \mathbf{x})$ beschrieben werden. Soweit nicht anders gesagt, gilt hier stets der nicht-relativistische Grenzfall $v \ll c$ der klassischen Mechanik.

Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Bilder, in der die Bewegung dieser Materie verstanden werden kann. Im *Eulerschen Bild* wird ein festes Raumgebiet mit zeitlich konstantem Volumen V untersucht, das von der Materie durchströmt wird. Im *Lagrangeschen Bild* hingegen wird eine gewisse feste Menge Materie betrachtet, die meist durch ihre Masse M charakterisiert wird. Diese Masse M bewegt sich mit der Strömung im Raum und ändert dabei ihre Form und ihr Volumen.

Standardwerke der Hydrodynamik wie Landau und Lifschitz (1991) beginnen ihre Einführung meist im Eulerschen Bild. Da SPH jedoch ein Lagrangesches Verfahren ist,¹ sollen hier die Grundlagen der Hydrodynamik im Lagrange-Bild vorgestellt werden. In Mihalas und Mihalas (1984) wird dieser Zugang genauer erläutert.

1.1.1 Allgemeines zum Lagrange-Bild

Die Zeitentwicklungsgleichungen der oben erwähnten Größen Dichte, Geschwindigkeit und Druck werden im Lagrange-Bild hergeleitet, indem eine gewisse Masse M betrachtet wird, die ein gewisses zeitlich veränderliches Volumen $V(t)$ einnimmt. Für dieses Volumen $V(t)$ werden Bilanzgleichungen für die Erhaltungsgrößen Impuls und Energie aufgestellt, aus denen dann die Zeitentwicklungsgleichungen folgen.

¹Der SPH-Formalismus wird in Kapitel 2 vorgestellt.

Für eine in diesem Volumen enthaltene Quantität

$$A(t) = \int_{V(t)} a(t, \mathbf{x}') dV' \quad (1.1)$$

gilt das *Reynoldsche Transporttheorem*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} a(t, \mathbf{x}') dV' \\ &= \int_{V(t)} \left[\frac{D}{Dt} a(t, \mathbf{x}') + a(t, \mathbf{x}') \nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}') \right] dV' \quad , \end{aligned} \quad (1.2)$$

wenn sich die Materie und damit der Rand des Volumens mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}')$ bewegen. Ein Beweis wird in Mihalas und Mihalas (1984), Kapitel 2.1.18 vorgestellt. Die Ableitung D/Dt ist dabei im mitbewegten System der Materie definiert und heißt deshalb auch *substantielle Ableitung*. Für sie wird $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ angenommen, woraus sich $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ ergibt.

Aus (1.2) folgt insbesondere für $a = 1$ die *Volumengleichung*

$$\frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV' = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dV' \quad . \quad (1.3)$$

Sie beschreibt, wie sich das zur festen Masse gehörende Volumen V mit der Zeit ändert.

1.1.2 Die Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung ist das hydrodynamische Äquivalent zur Massenerhaltung. Da sich das Volumen V mit der Materie mitbewegt, gibt es keinen Massenfluß durch die Oberfläche des betrachteten Volumens. Die Masse $M = \int_V \varrho dV'$ ist bis auf eventuelle Quellterme $q_m(t, \mathbf{x})$ erhalten, also

$$\frac{d}{dt} M = \int_V q_m dV' \quad . \quad (1.4)$$

Mit dem Transporttheorem (1.2) ergibt sich

$$0 = \frac{d}{dt} M - \int_V q_m dV' = \frac{d}{dt} \int_V \varrho dV' - \int_V q_m dV' = \int_V \left[\frac{D}{Dt} \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} - q_m \right] dV' \quad . \quad (1.5)$$

Da dies für beliebige Volumina V gilt, folgt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{D}{Dt} \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = q_m \quad . \quad (1.6)$$

Die Massenquellterme q_m sind meist null, da Masse in der klassischen Mechanik nicht spontan entsteht. Eine Ausnahme dazu bilden etwa Gase mit mehreren Komponenten, die sich ineinander umwandeln können; die Masse der einzelnen Komponenten ist dann nicht erhalten.

1.1.3 Die Euler-Gleichung

Die Bewegungsgleichung folgt aus der Impulsbilanz für das Volumen V . Da keine Masse durch die Oberfläche fließt, ändert sich der im Volumen V enthaltene Impuls $\mathbf{p} = \int_V \varrho \mathbf{v} dV'$ nur durch Kräfte, die auf die Masse im Volumen einwirken. Man unterscheidet in der Hydrodynamik zwischen Volumenkräften, die überall im Inneren wirken, und Oberflächenkräften, die die Wechselwirkung des Volumens mit seiner angrenzenden Umgebung beinhalten. Es gilt also

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{v} dV' = - \oint_{\partial V} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} + \int_V \mathbf{q}_p dV' . \quad (1.7)$$

Im Tensor \mathbf{P} sind die Oberflächenkräfte, also Druck-, Spannungs- und Scherkräfte enthalten; im Impulsquellterm \mathbf{q}_p sind die Volumenkräfte zusammengefaßt. Das Oberflächenintegral kann nach dem Gaußschen Satz in ein Volumenintegral überführt werden. Mit der gleichen Argumentation wie für Gleichung (1.6) und nach Einsetzen derselben führt dies zur *Bewegungsgleichung*

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{\varrho} \mathbf{q}_p . \quad (1.8)$$

Der Impulsquellterm \mathbf{q}_p wird null, wenn keine Volumenkräfte wie Gravitation oder Magnetismus angreifen. Der Tensor \mathbf{P} ist in Medien ohne Scherkräfte und Viskosität isotrop, also $\mathbf{P} = p \mathbf{E}$ mit dem Druck p . (Das Symbol \mathbf{E} bezeichnet den Einheitstensor, siehe Anhang A.) In diesem Fall wird Gleichung (1.8) auch als *Euler-Gleichung* bezeichnet.

1.1.4 Die Energiegleichung

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet $dE + p dV = T dS$ oder

$$de + p d(\frac{1}{\varrho}) = T ds \quad (1.9)$$

mit der spezifischen inneren Energie e und der spezifischen Entropie s . Er beschreibt die Energieerhaltung für ein infinitesimales Massenelement. Wenn dieses Massenelement in der Zeit verfolgt wird, gilt nach Einsetzen der Kontinuitätsgleichung (1.6)

$$\frac{D}{Dt} e + \frac{p}{\varrho} \nabla \cdot \mathbf{v} = T \frac{D}{Dt} s . \quad (1.10)$$

Damit gilt für die Dichte der inneren Energie $\varepsilon = \varrho e$

$$\frac{D}{Dt} \varepsilon + (\varepsilon + p) \nabla \cdot \mathbf{v} = q_e , \quad (1.11)$$

wobei q_e die Wärmeleitung pro Volumen beschreibt.

Die Gesamtenergie in einem endlichen Volumen V ist gegeben durch

$$E = \int_V \left(\frac{\varrho}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon \right) dV' \quad (1.12)$$

und ihre Zeitentwicklung lautet

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} E &= \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varrho}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon \right) dV' \\
 &= \int_V \left(\frac{D}{Dt} \left[\frac{\varrho}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon \right] + \left[\frac{\varrho}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon \right] \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV' \\
 &= \int_V (-\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + q_e) dV' \\
 &= - \oint_{\partial V} p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int_V q_e dV' \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

nach Einsetzen der Kontinuitätsgleichung (1.6) und der Bewegungsgleichung (1.8) und nach Anwendung des Gaußschen Satzes.

Der Term $\oint p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ beschreibt die Volumenarbeit $p dV$: Er integriert den Druck p über das Gebiet, um das sich das Volumen verkleinert, also die Orte, die der Rand des Volumens überstreicht. Der Rand bewegt sich dabei mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} . In $\int q_e dV'$ sind die Energiequellterme außer der Volumenarbeit zusammengefaßt; dies sind beispielsweise viskose Heizung, Wärmeleitung oder Wechselwirkung mit Strahlung.

1.1.5 Zustandsgleichungen

Eine Zustandsgleichung $p = p(\varrho, T)$ und eine kalorische Zustandsgleichung $T = T(\varrho, \varepsilon)$ oder $p = p(\varrho, \varepsilon)$ schließen das System.

Ideales Gas

Für ein *ideales Gas* gilt die ideale Gasgleichung $pV = NkT$ mit der Boltzmann-Konstanten k und der Anzahl der Teilchen N . Sie ist äquivalent zur Zustandsgleichung

$$p = \frac{k}{\mu} \varrho T \quad , \tag{1.14}$$

in der μ für die Molmasse des Gases steht. Weiter gilt für ideale Gase die kalorische Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1) \varepsilon \tag{1.15}$$

mit dem isentropischen Exponenten $\gamma = c_p/c_V$. Einatomige ideale Gase haben $\gamma = 5/3$, einatomige ultra-relativistische Gase $\gamma = 4/3$.

1.2 Strahlung und Strahlungstransport

In diesem Abschnitt wird eine mögliche Beschreibung von elektromagnetischen Strahlungsfeldern vorgestellt. Dabei werden gewisse Näherungen angenommen, um schließlich

zu einer Beschreibung zu gelangen, die für gewisse astrophysikalische Objekte sinnvoll ist. Für eine tiefergehende Einführung sei auf Pomraning (1973) oder Rybiki und Lightman (1979) verwiesen.

Ein Photon der semiklassischen Physik wird durch seine Frequenz ν und Richtung Ω vollständig charakterisiert. Polarisation und Phase des Photons werden dabei vernachlässigt. Sein Impuls ist $\mathbf{p} = h\nu\Omega/c$. Die klassischen Eigenschaften eines Strahlungsfeldes sind somit alle in der Phasenraumdichte

$$f = \frac{dn}{d^3x d^3p} = f(t, \mathbf{x}, \nu, \Omega) \quad (1.16)$$

enthalten.

1.2.1 Transportgleichung

Um die Zeitentwicklung der Phasenraumdichte zu erhalten, betrachte man ein infinitesimales sechs-dimensionales Volumen V_p im Phasenraum, das den Phasenraumpunkt eines gegebenen Systems umschließt:

$$dV_p = d^3x d^3p = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d^3x d\nu d\Omega \quad . \quad (1.17)$$

Dieses Volumen soll sich entlang der Trajektorie des Systems mit diesem mitbewegen. Nach dem Satz von Liouville (Goldstein 1989, Kapitel 8.8) ist der Inhalt dieses Volumens zeitlich konstant.

Die Anzahl der Photonen $dn = f dV_p$ in diesem Volumen ist bis auf Streu- und Absorptionsprozesse erhalten. Es gilt die *Bilanzgleichung* (Pomraning 1973, Kapitel II.3)

$$\begin{aligned} \text{Änderung der Photonenzahl} &= + \text{Emission} - \text{Absorption} \\ &\quad + \text{Einstreuung} - \text{Ausstreuung} \end{aligned}$$

oder (die Zeit- und Ortsabhängigkeiten werden hier nicht explizit angegeben)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[f(\nu, \Omega) dV_p \right] &= q(\nu, \Omega) dV_p - c\sigma_a(\nu, \Omega) f(\nu, \Omega) dV_p \\ &\quad + \int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\Omega' \left[c\sigma_s(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \rightarrow \Omega) f(\nu', \Omega') \right. \\ &\quad \left. - c\sigma_s(\nu \rightarrow \nu', \Omega \rightarrow \Omega') f(\nu, \Omega) \right] dV_p \quad . \quad (1.18) \end{aligned}$$

Dabei sind $q(\nu, \Omega)$ ein Emissionsterm, der die Photonenquellen beschreibt, und $\sigma_a(\nu, \Omega)$ der Absorptionskoeffizient, der die Photonensenken beschreibt. $\sigma_s(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \rightarrow \Omega)$ ist der Streukoeffizient für einen Übergang von (ν', Ω') nach (ν, Ω) .

Man könnte induzierte Emission und induzierte Streuung im Emissionsterm und im Streukoeffizienten berücksichtigen. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten für induzierte Prozesse aber proportional zur Besetzungszahl des Zielzustandes und damit zu f sind, ist es üblich, sie explizit in der Bilanzgleichung zu berücksichtigen.

Durch induzierte Übergänge verändert sich die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Zuständen von P zu $P' = (1 + n)P$; dabei ist n die Besetzungszahl des Zielzustandes (Pomraning 1973, Kapitel II.9). Der Zielzustand ist in diesem Fall eine Phasenraumzelle, die wegen der beiden möglichen Polarisationszustände des Photons das Volumen $\Delta V = h^3/2$ hat. Für die Besetzungszahl gilt

$$n = \int_{\Delta V} f dV_p = f \Delta V = \frac{h^3}{2} f \quad . \quad (1.19)$$

Damit ist

$$P' = (1 + n)P = \left(1 + \frac{h^3}{2} f\right) P \quad . \quad (1.20)$$

Es ist zweckmäßig, die Terme der induzierten Emission und der Absorption zusammenzufassen. Dazu geht man von $\sigma_a(\nu, \Omega)$ auf den korrigierten Absorptionskoeffizienten

$$\sigma'_a(\nu, \Omega) = \sigma_a(\nu, \Omega) - \frac{h^3}{2c} q(\nu, \Omega) \quad . \quad (1.21)$$

über und ersetzt den Quellterm $q(\nu, \Omega)$ durch die Größe

$$q'(\nu, \Omega) = \frac{q(\nu, \Omega)}{c\sigma'_a(\nu, \Omega)} \quad . \quad (1.22)$$

Ferner ist das Volumen dV_p in der Bilanzgleichung (1.18) konstant und hebt sich auf beiden Seiten weg. Dies führt zur *Transportgleichung*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\nu, \Omega) = & c\sigma'_a(\nu, \Omega) \left(q'(\nu, \Omega) - f(\nu, \Omega) \right) \\ & + \int_0^\infty d\nu' \int_{4\pi} d\Omega' \left[c\sigma_s(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \rightarrow \Omega) f(\nu', \Omega') \left(1 + \frac{h^3}{2} f(\nu, \Omega) \right) \right. \\ & \left. - c\sigma_s(\nu \rightarrow \nu', \Omega \rightarrow \Omega') f(\nu, \Omega) \left(1 + \frac{h^3}{2} f(\nu', \Omega') \right) \right] \quad . \quad (1.23) \end{aligned}$$

1.2.2 Motivation der Näherungen

Die Transportgleichung (1.23) ist eine Integro-Differentialgleichung; sie kann nur für Spezialfälle analytisch gelöst werden. Auch die numerische Lösung von Anfangswertproblemen ist im allgemeinen zu aufwendig. Im folgenden werden deshalb Näherungen eingeführt, die die Transportgleichung in ein System partieller Differentialgleichungen mit nur wenigen Variablen überführen.

Diese Näherungen sollen dadurch motiviert werden, daß das Strahlungsfeld in Materie eingebettet wird. Diese Materie soll (lokal) mit sich selbst im thermodynamischen

Gleichgewicht sein², bis auf ein Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} (lokal) isotrop sein und sich mit Relativgeschwindigkeiten $v \ll c$ bewegen.

Ferner wird angenommen, daß die Strahlung stark mit der Materie wechselwirkt, d. h. daß die Materie optisch dick ist. Die mittlere freie Weglänge der Photonen ist dann viel kleiner als typische Abmessungen in der Materie. Es wird nicht verlangt, daß die Strahlung mit der Materie im thermodynamischen Gleichgewicht steht. Solche Bedingung gelten in der Natur etwa im Inneren von Sternen oder von undurchsichtigen Gas- oder Staubwolken.

Das Gegenteil zu diesen Annahmen wäre optisch dünne Materie oder ein Vakuum, in dem sich Strahlung frei oder annähernd frei ausbreiten kann; Photonen bewegen sich dann mit Lichtgeschwindigkeit geradlinig von ihrem Entstehungsort weg. In diesem Grenzfall verläßt die Strahlung ein betrachtetes Raumgebiet instantan und braucht nur in der Energiebilanz berücksichtigt zu werden. Ein Strahlungstransport im eigentlichen Sinne findet nicht statt.

1.2.3 Eine Umformulierung

Da bei den einzuführenden Näherungen physikalische Intuition, also ein globales Verständnis der betrachteten Vorgänge, eine wichtige Rolle spielt, soll hier von der recht unanschaulichen Größe „Phasenraumdichte“ auf die spezifische Intensität übergegangen werden. Diese ist als

$$\text{spez. Intensität} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche} \cdot \text{Frequenz} \cdot \text{Raumwinkel}} \quad (1.24)$$

oder

$$I(\nu, \Omega) = \frac{dE}{dt dA d\nu d\Omega} = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f(\nu, \Omega) \quad (1.25)$$

definiert. Gleichzeitig soll der Quellterm q' durch die Emissivität

$$S(\nu, \Omega) = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} q'(\nu, \Omega) \quad , \quad (1.26)$$

der emittierten Leistung je Volumen, Frequenz und Richtung ersetzt werden.

Wegen der Isotropie der Materie kann davon ausgegangen werden, daß die Emissivität S und der Absorptionskoeffizient σ'_a richtungsunabhängig sind und daß der Streukoeffizient σ_s höchstens vom Richtungskosinus $\mu = \Omega \cdot \Omega'$ abhängt.

Die Isotropie der Materie legt zusammen mit ihrer optischen Dicke nahe, daß das Strahlungsfeld zumindest annähernd isotrop sein wird. Deshalb ist es nicht ganz unvernünftig, anzunehmen, daß auch die Abhängigkeit des Streukoeffizienten vom Streuwinkel vernachlässigt werden kann. Dadurch wird

$$\sigma_s(\nu \rightarrow \nu') = 2\pi \int d\mu \sigma_s(\nu \rightarrow \nu', \mu) = 4\pi \sigma_s(\nu \rightarrow \nu', \Omega \cdot \Omega') \quad (1.27)$$

²Dies wird als LTE-Näherung bezeichnet; LTE (engl.) = local thermodynamic equilibrium

definiert. Dies gilt natürlich nur in dem Bezugssystem, in dem die Materie lokal in Ruhe ist. Zur Vereinfachung wird hier zunächst angenommen, daß die Materie global im Laborsystem in Ruhe ist.

Um die Transportgleichung im Laborsystem zu formulieren, wird die Identität

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \quad (1.28)$$

verwendet. Die totale (Lagrangesche) Ableitung bezieht sich hierbei auf Größen, die im mitbewegten System des Strahlungsfeldes definiert sind. Der Term $c\boldsymbol{\Omega}$ bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld der Strahlung.

In Gleichung (1.28) sind keine Ableitungen von ν und $\boldsymbol{\Omega}$ vorhanden, weil angenommen wird, daß sich Frequenz und Richtung der Photonen nicht kontinuierlich ändern, während das Photonenpaket mit dem Strahlungsfeld strömt. (Die punktförmigen Wechselwirkungen mit der Materie sind dabei ausgenommen.) Solche kontinuierliche Wechselwirkungen würden beispielsweise durch gravitative Rotverschiebung oder durch einen ortsabhängigen Brechungsindex verursacht.

Obige Näherungen, in die Transportgleichung eingesetzt, und selbige für die spezifische Intensität umformuliert, ergeben im Laborsystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I(\nu, \boldsymbol{\Omega}) + c\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\nu, \boldsymbol{\Omega}) = \\ c\sigma'_a(\nu) \left(S(\nu) - I(\nu, \boldsymbol{\Omega}) \right) \\ + \int_0^\infty d\nu' \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \left[\frac{\nu}{\nu'} c\sigma_s(\nu' \rightarrow \nu) I(\nu', \boldsymbol{\Omega}') \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(\nu, \boldsymbol{\Omega}) \right) \right. \\ \left. - c\sigma_s(\nu \rightarrow \nu') I(\nu, \boldsymbol{\Omega}) \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I(\nu', \boldsymbol{\Omega}') \right) \right] . \quad (1.29) \end{aligned}$$

Diese Formulierung der Transportgleichung für Photonen gilt, wenn die Materie im Laborsystem in Ruhe ist.

1.2.4 Darstellung der Richtungscharakteristik

Die Richtungsabhängigkeit der spezifischen Intensität kann nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden (Jackson 1975, Kapitel 3.5; Bronstein und Semendjajew 1991, Kapitel 3.3.2.3.4):

$$I(\nu, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_{\ell,m} I_{\ell m}(\nu) Y_{\ell m}(\boldsymbol{\Omega}) . \quad (1.30)$$

Wenn das Strahlungsfeld, wie oben erwähnt, annähernd isotrop ist, gilt

$$|I_{0m}| \gg |I_{1m}| \gg |I_{\ell m}| \quad \text{f. a. } \ell \geq 2 . \quad (1.31)$$

Damit kann die Entwicklung (wie in der Physik üblich³) nach dem Term erster Ordnung abgebrochen werden. In Multipolmomenten⁴ lautet die Näherung

$$I(\nu, \Omega) = \frac{1}{4\pi} I_0(\nu) + \frac{3}{4\pi} \Omega \cdot \mathbf{I}_1(\nu) \quad . \quad (1.32)$$

Die Funktionen I_0 und \mathbf{I}_1 sind das nullte und erste (bzw. Monopol- und Dipol-) Moment der Richtungscharakteristik des Strahlungsfeldes. Da in der Entwicklung die Terme zweiter Ordnung I_{2m} vernachlässigt wurden, ist das zweite (oder Quadrupol-) Moment diagonal und isotrop;⁵ in drei Dimensionen gilt $l_2 = (I_0/3) E$.

Das n -te Moment der Richtungscharakteristik ergibt sich durch Integration über alle Winkel, nachdem zuvor n -mal mit Ω multipliziert wurde:

$$I_0(\nu) = \int_{4\pi} d\Omega I(\nu, \Omega) \quad (1.33)$$

$$\mathbf{I}_1(\nu) = \int_{4\pi} d\Omega I(\nu, \Omega) \Omega \quad (1.34)$$

$$l_2(\nu) = \int_{4\pi} d\Omega I(\nu, \Omega) \Omega \Omega = \frac{1}{3} I_0(\nu) E \quad (1.35)$$

(Die Schreibweise $\Omega \Omega$ bezeichnet das Tensorprodukt $\Omega \otimes \Omega$, siehe Anhang A.)

Die ersten beiden Momente der Transportgleichung (1.29) ergeben

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I_0(\nu) + c \nabla \cdot \mathbf{I}_1(\nu) = & \\ & c \sigma'_a(\nu) \left(4\pi S(\nu) - I_0(\nu) \right) \\ & + \int_0^\infty d\nu' \left[\frac{\nu}{\nu'} c \sigma_s(\nu' \rightarrow \nu) I_0(\nu') - c \sigma_s(\nu \rightarrow \nu') I_0(\nu) \right] \\ & + \frac{c^2}{2h} \int_0^\infty d\nu' \left[\frac{1}{\nu^2 \nu'} c \sigma_s(\nu' \rightarrow \nu) - \frac{1}{\nu'^3} c \sigma_s(\nu \rightarrow \nu') \right] I_0(\nu') I_0(\nu) \end{aligned} \quad (1.36)$$

³... falls nicht wegen der Komplexität des Problems auch der lineare Term vernachlässigt werden muß.

⁴Dies sind keine Multipolmomente im eigentlichen Sinne, da sie keine radiale Abhängigkeit beschreiben. Hier beschreiben sie nur eine Richtungscharakteristik.

⁵Wenn gewisse Entwicklungskoeffizienten für Kugelflächenfunktionen verschwinden, ist das für die entsprechenden Multipolmomente nicht notwendig auch der Fall. Beispielsweise gibt es fünf Entwicklungskoeffizienten I_{2m} für das zweite Moment, der Quadrupoltensor jedoch hat neun Komponenten. Die vier sich ergebenden Zwangsbedingungen sind die Symmetriebedingungen $I_2^{\alpha\beta} = I_2^{\beta\alpha}$ und die Spurbedingung $\text{tr } l_2 = I_0$.

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_1(\nu) + \frac{c}{3} \nabla I_0(\nu) = & \\ & - \left[c\sigma'_a(\nu) + \int_0^\infty d\nu' c\sigma_s(\nu \rightarrow \nu') \right] \mathbf{I}_1(\nu) \\ & + \frac{c^2}{2h} \int_0^\infty d\nu' \left[\frac{1}{\nu^2 \nu'} c\sigma_s(\nu' \rightarrow \nu) - \frac{1}{\nu'^3} c\sigma_s(\nu \rightarrow \nu') \right] I_0(\nu') \mathbf{I}_1(\nu) \quad , \end{aligned} \quad (1.37)$$

wobei ausgenutzt wurde, daß die Koeffizienten σ als isotrop angenommen wurden.

Um die Frequenzintegrale in der Transportgleichung zum Verschwinden zu bringen, wird angenommen, daß die Streuvorgänge kohärent sind, d. h.

$$\sigma_s(\nu' \rightarrow \nu) = \sigma_s(\nu) \delta(\nu - \nu') \quad . \quad (1.38)$$

Dadurch kollabieren die Frequenzintegrale.

Weiter sollen Materie und Strahlung nach den Annahmen von oben stark miteinander wechselwirken. Typische Längenskalen für die Strahlung werden gleich denen für Materie sein. Außerdem soll ja $v \ll c$ gelten; somit folgt aus $\Delta x \approx v \Delta t$ für die Materie dann $\Delta x \ll c \Delta t$ für die Strahlung. Der Term $\partial/\partial t \mathbf{I}_1(\nu)$ in Gleichung (1.37) kann also gegenüber $c/3 \nabla I_0(\nu)$ vernachlässigt werden.

Nun kann (1.37) nach $\mathbf{I}_1(\nu)$ aufgelöst und in (1.36) eingesetzt werden. Dies führt zur *Eddington- oder Diffusions-Näherung* der Transportgleichung (Pomraning 1973, Kapitel III.2):

$$\frac{\partial}{\partial t} I_0(\nu) - \nabla \cdot D(\nu) \nabla I_0(\nu) = c\sigma'_a(\nu) \left(4\pi S(\nu) - I_0(\nu) \right) \quad , \quad (1.39)$$

die die Form einer Diffusionsgleichung hat, mit dem Diffusionskoeffizienten

$$D(\nu) = \frac{c^2}{3(c\sigma'_a(\nu) + c\sigma_s(\nu))} \quad . \quad (1.40)$$

1.2.5 Darstellung des Spektrums

Die Frequenzverteilung, also das Spektrum des Strahlungsfeldes, hängt von vielen interessanten Eigenschaften der Materie ab, etwa von deren chemischer Zusammensetzung oder Temperatur. Nichtsdestotrotz ist es sehr aufwendig, sowohl mehrere Raumdimensionen als auch das Spektrum numerisch aufzulösen.

Ein beliebter Ansatz, der die Frequenzabhängigkeit von Streuung und Absorption grundsätzlich korrekt widerspiegeln kann, ist die Mehrgruppenmethode. Dabei wird das Spektrum in mehrere Frequenzbereiche aufgeteilt, etwa analog zu einer Gitteraufteilung des Raumes. Somit wird die Gesamtintensität in jedem dieser Frequenzbereiche berücksichtigt, ohne diese Bereiche genauer aufzulösen. Zweckmäßigerweise wird man die Grenzen der Bereiche den zu berücksichtigenden physikalischen Prozessen anpassen.

Da die Materie mit sich selbst lokal im thermodynamischen Gleichgewicht stehen und die mittlere freie Weglänge der Strahlung klein sein soll, wird das Strahlungsfeld bereits nach kurzer Strecke thermalisiert werden. Weil ein thermisches Strahlungsfeld durch eine Größe (etwa der Temperatur des Strahlers oder der Gesamtintensität) vollständig beschrieben wird, sollte hierfür ein einziger Frequenzbereich ausreichen.

Ein noch einfacherer Ansatz wäre die sogenannte Gleichgewichts-Diffusionsnäherung (Pomraning 1973, Kapitel III.7), bei der zusätzlich angenommen wird, daß Strahlung und Materie lokal im thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Im Gleichgewicht mit der Temperatur T gilt dann

$$I(\nu) = 4\pi B(\nu, T) \quad (1.41)$$

mit der Planck-Funktion

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad . \quad (1.42)$$

Die Gesamtintensität

$$I_{tot} = \int_0^{\infty} d\nu I(\nu) \quad (1.43)$$

ist dann

$$I_{tot} = 4\sigma T^4 \quad (1.44)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten σ . Dieser Ansatz, den Lucy (1977) gewählt hat, soll hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Damit sich in der Transportgleichung (1.39) im thermodynamischen Gleichgewicht zwischen Strahlung und Materie die Terme für Absorption und Emission aufheben, muß die Emissivität $S(\nu)$ gleich der Planck-Funktion $B(\nu, T)$ sein.

Bei Wechselwirkungen, die nur schwach von der Frequenzverteilung der Photonen abhängen, ist es gerechtfertigt, gemittelte Koeffizienten $\bar{\sigma}$ einzuführen. Die genaue Art der Mittelung ist nicht festgelegt, sollte jedoch im Grenzfall eines thermischen Strahlungsfeldes das exakte Ergebnis liefern. Das Rosseland-Mittel (Pomraning 1973, Kapitel III.8)

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} := \frac{\int_0^{\infty} d\nu \frac{1}{\sigma(\nu)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T}}{\int_0^{\infty} d\nu \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T}} \quad (1.45)$$

hat diese Eigenschaft. $B(\nu, T)$ ist dabei wieder die Planck-Funktion.

Damit sind die Wechselwirkungskoeffizienten $\bar{\sigma}'_a$ und $\bar{\sigma}_s$ frequenzunabhängig. Die Transportgleichung (1.39) kann über alle Frequenzen integriert werden, um so von der spezifischen zur Gesamtintensität überzugehen. Dies entspricht, wenn man so will, einer Mehrgruppenmethode mit nur einer Gruppe.

1.2.6 Ergebnis

Die physikalisch interessanten Größen in der Strahlungs-Hydrodynamik sind die Energiedichte J , der Fluß \mathbf{F} und der Drucktensor \mathbf{P} . Diese sind in der Diffusionsnäherung durch

$$J = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu I_0(\nu) = \frac{1}{c} I_{tot} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{F} = \int_0^\infty d\nu \mathbf{I}_1(\nu) = -\bar{D} \nabla J \quad (1.47)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \mathbf{I}_2(\nu) = \frac{1}{3} J \mathbf{E} \quad (1.48)$$

gegeben. Die endgültige Form der über alle Frequenzen integrierten Transportgleichung in der Diffusionsnäherung, in diesen Größen formuliert, lautet dann

$$\frac{\partial}{\partial t} J + \nabla \mathbf{F} = c \bar{\sigma}'_a (a T^4 - J) \quad (1.49)$$

$$\text{mit } \mathbf{F} = -\frac{c}{\bar{\sigma}'_a + \bar{\sigma}_s} \nabla p \quad (1.50)$$

$$\text{und } p = \frac{1}{3} J, \quad (1.51)$$

wobei $a = 4\sigma/c$. Sie gilt im Laborsystem bei ruhender Materie.

Eine Testgröße für die Gültigkeit dieser Näherung ist die Anisotropie. Wenn nicht $|\mathbf{F}| \ll cJ$, dann sind die Voraussetzungen für die Diffusionsnäherung nicht gegeben. Die Diffusionsnäherung gilt also vorwiegend im Inneren von Objekten und bricht in der Nähe der Oberfläche zusammen.

1.2.7 Photonen als ideales Gas

Die Relation zwischen Druck und Energiedichte für Strahlung lautet $p_r = J/3$. Diese hat die gleiche Form wie die Zustandsgleichung eines idealen Gases $p_m = (\gamma - 1)\varepsilon$ für einen isentropischen Exponenten $\gamma = 4/3$. Dieser Wert von $4/3$ ergibt sich auch quantenmechanisch für ein ideales Gas in der ultrarelativistischen Näherung $v \approx c$. Deshalb spricht man von einem *idealen* (ultrarelativistischen) *Photonengas*.

Während die Zustandsgleichung des Photonengases ähnlich der von Materie ist, sind die Bewegungsgleichungen von Materie und Photonengas in dieser Näherung sehr verschieden. Die Bewegungsgleichung für Materie ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit. Der Druckgradient und die Dichte bestimmen die Beschleunigung der Materie. Die Bewegungsgleichung für das Photonengas ist hingegen eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit, da der Gradient des Strahlungsdrucks direkt die Geschwindigkeit der Strahlung bzw. die Stärke des Strahlungsflusses festlegt. Dementsprechend hat die Bewegung der Materie eine Trägheit, die es für Photonen in dieser Näherung nicht gibt.

1.2.8 Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Materie

Die Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Materie können zu drei Größen zusammengefaßt werden: der Emissivität $S(\nu, \Omega)$, die im Grenzfall des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts zwischen Strahlung und Materie in die Planck-Funktion $B(\nu, T)$ übergeht, und den Streu- und Absorptionskoeffizienten $\sigma_s(\nu' \rightarrow \nu, \Omega' \rightarrow \Omega)$ und $\sigma_a(\nu, \Omega)$.

Diese Koeffizienten σ_s und σ_a haben die Dimension [1/Länge] und sind das Reziproke der mittleren freien Weglänge (der lokalen Streu- bzw. Absorptionslänge). Statt der Koeffizienten σ wird auch der Massenkoeffizient κ , definiert durch $\sigma = \kappa \varrho$, verwendet. Dieser hat die Dimension [Fläche/Masse].

Die *optische Tiefe* τ eines Ortes gibt an, wieviele freie Weglängen bis zur Oberfläche zurückzulegen sind. Wenn die Oberfläche bei $x = 0$ liegt, gilt

$$\tau(x) = \int_0^x \sigma(x') dx' \quad . \quad (1.52)$$

Einige der in der Astrophysik wichtigen Wechselwirkungsvorgänge werden im folgenden kurz vorgestellt.

Thomson-Streuung

Thomson-Streuung ist die elastische Streuung eines Photons an einem freien Elektron. Diese Streuung kann als elastisch betrachtet werden, wenn die Energie des Photons viel kleiner als die Ruheenergie des Elektrons ist. Der Massenstreuungskoeffizient ist im hier betrachteten Temperatur- und Frequenzbereich sowohl unabhängig von der Frequenz des Photons als auch von der Temperatur und Dichte der Materie und beträgt (Pomraning 1973, Kapitel VII.5, p. 182; Rybiki und Lightman 1979, Kapitel 3.4)

$$\kappa_T \approx 0.40 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} = 0.040 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad . \quad (1.53)$$

Bremsstrahlung

Ein beschleunigtes Elektron kann im elektrischen Feld eines Protons ein Photon emittieren (Bremsstrahlung) oder absorbieren (inverse Bremsstrahlung). Der Massenabsorptionskoeffizient ist im hier betrachteten Temperatur- und Frequenzbereich sowohl abhängig von der Frequenz des Photons als auch der Dichte und Temperatur der Materie. Mit den oben eingeführten Näherungen ist sein Rosseland-Mittel (Pomraning 1973, Kapitel VII.4, p. 174; Rybiki und Lightman 1979, Kapitel 5)

$$\bar{\kappa}'_B \approx Q_B \cdot \varrho T^{-7/2} \quad . \quad (1.54)$$

Der Faktor Q_B hängt nur schwach von der Temperatur und Dichte der Materie ab und beträgt (bei $T = 10000 \text{ K}$ und $\varrho = 10^{-6} \text{ kg/m}^3$) rund $8.815 \cdot 10^{18} \text{ m}^5 \text{ K}^{7/2} / \text{kg}^2$.

Compton-Streuung

Compton-Streuung ist die inelastische Streuung eines Photons an einem freien Elektron (Pomraning 1973, Kapitel VIII; Rybiki und Lightman 1979, Kapitel 7). Sie spielt besonders bei hohen Temperaturen eine Rolle, da es dann mehr Photonen mit hohen Energien gibt. Für Photonen mit niedriger Energie geht die Compton-Streuung in die Thomson-Streuung (s. o.) über. Compton-Streuung wird hier nicht betrachtet.

Streuung an Atomen und Atomrümpfen

Die oben genannten Wechselwirkungsarten werden als *frei-frei*-Wechselwirkungen bezeichnet, da die beteiligten Elektronen sowohl vor als auch nach der Wechselwirkung nicht gebunden sind. Bei *gebunden-frei*- oder *gebunden-gebunden*-Wechselwirkungen hängen die Koeffizienten stark von der Frequenz des Photons ab (Absorptionskanten!) (Pomraning 1973, Kapitel VII; Rybiki und Lightman 1979, Kapitel 10). Frequenzmittelungen sind deshalb relativ ungenau. Bei hohen Temperaturen wird Materie zu Plasma, in dem Streuung an freien Elektronen dominiert. Streuung an Atomen und Atomrümpfen wird deshalb nicht näher betrachtet.

1.2.9 Oberflächen, Abstrahlung, optisch dünne Gebiete

Die Diffusionsnäherung der Transportgleichung gilt wegen der Annahmen, die zu ihrer Herleitung verwendet werden, eigentlich nur im Inneren von optisch dicken Objekten. Nun haben alle astrophysikalischen Objekte⁶ eine Oberfläche, durch die sie Strahlung abgeben. Diese Randeffekte müssen in der Energiebilanz berücksichtigt werden. Zudem ist die abgegebene Strahlung auch die einzige Beobachtungsgröße. Die Oberfläche muß deshalb Bestandteil jeder sinnvollen Beschreibung sein.

Im Inneren

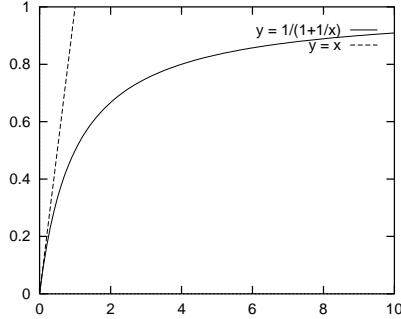
Auch im Inneren eines Objektes kann die Materie aus verschiedenen Gründen stellenweise optisch dünn werden. In diesen Gebieten wird der Strahlungsfluß, der ja im Rahmen der Diffusionsnäherung ermittelt wird, dann unphysikalisch groß. (Der Fluß ist nach (1.50) ungefähr proportional zur mittleren freien Weglänge.) Dies kann durch eine künstliche Flußbegrenzung verhindert werden.

Eine mögliche Begrenzungsvorschrift ist $x \mapsto x^* = 1/(1 + 1/x)$ (siehe Abb. 1.1). Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} x^* = x$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} x^* = 1$, d. h. sie begrenzt x^* auf Werte kleiner als 1. Um sie auf den Fluß anzuwenden, muß dieser zuvor normiert werden.

Der maximale sinnvolle Fluß in der Diffusionsnäherung⁷ beträgt $|\mathbf{F}_{max}| = cJ/2$; das ist der Fluß, der an einer freien Oberfläche herrscht: Wenn die Energiedichte nahe der Oberfläche J beträgt und die Strahlung dort isotrop ist, wird gerade die Hälfte der Strahlung die Oberfläche passieren.

⁶Dies gilt natürlich nur für die astrophysikalischen Objekte, die auch beobachtet werden können.

⁷Der maximale physikalisch sinnvolle Fluß beträgt allerdings $|\mathbf{F}_{max}| = cJ$.

Abbildung 1.1: Die Funktion $1/(1 + 1/x)$

Die Richtung des begrenzten Flusses soll gleich der ursprünglichen Richtung sein. Wenn der Term $|\mathbf{F}|/(cJ/2)$ in die Begrenzungsvorschrift eingesetzt wird, ergibt dies

$$\frac{|\mathbf{F}^*|}{cJ/2} = \frac{1}{1 + \frac{cJ/2}{|\mathbf{F}|}} \quad , \quad (1.55)$$

oder, mit der Richtung von \mathbf{F} versehen,

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{1 + \frac{|\mathbf{F}|}{cJ/2}} \mathbf{F} \quad . \quad (1.56)$$

Diese Begrenzung beschränkt außerdem andere Größen (etwa die Anisotropie $a = |\mathbf{F}|/cJ$) auf physikalisch sinnvolle Werte.

Oberflächen

Leider ist die Oberfläche eines Objektes nur in seltenen Fällen optisch dick. Gewöhnlich nimmt die Dichte (die materielle Dichte, und damit auch die optische Dichte) nach außen hin ab. Der Rand eines Objektes ist etwa der Bereich, in dem $\tau \lesssim 1$ gilt. Dort brechen die hier verwendeten Näherungen zusammen.⁸ Um dennoch zu einer physikalisch korrekten Beschreibung der Abstrahlung zu gelangen, muß der wahre Strahlungsfluß als Randbedingung vorgegeben werden.

1.3 Strahlungs-Hydrodynamik

In der Transportgleichung (1.49) wird die Materie noch nicht berücksichtigt. Strahlung und Materie beeinflussen sich aber gegenseitig.

Da die Strahlung in der hier verwendeten klassischen Näherung keine Masse hat, gilt die Kontinuitätsgleichung (1.6) unverändert mit

$$\frac{D}{Dt} \varrho + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (1.57)$$

⁸Die Oberfläche eines Objektes kann *numerisch* optisch dick werden, wenn der Rand nicht aufgelöst wird. In diesem Fall wird die Abstrahlung natürlich auch nicht korrekt wiedergegeben.

wobei der Massenquellterm $q_m = 0$ gesetzt wurde.

Da die Strahlung keine Masse hat, enthält sie auch keinen Impuls. Allerdings muß der Strahlungsdruck $J/3$ in der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden. Eine entsprechende Herleitung wie für Gleichung (1.8) ergibt

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \nabla \left(p + \frac{1}{3} J \right) = 0 \quad , \quad (1.58)$$

wobei der Impulsquellterm $\mathbf{q}_p = \mathbf{0}$ gesetzt wurde.

Analog zu Gleichung (1.11) kann aus dem ersten Hauptsatz unter Berücksichtigung der Strahlung eine Gleichung für die gesamte innere Energie $(\varepsilon + J)$ bestimmt werden:

$$\frac{D}{Dt} (\varepsilon + J) + \left(\varepsilon + p + \frac{4}{3} J \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (1.59)$$

mit dem Gesamtdruck $p + J/3$. Dabei muß der Strahlungsfluß als Energiequellterm $q_e = -\nabla \cdot \mathbf{F}$ berücksichtigt werden. Man beachte, daß der Strahlungsfluß dabei relativ zur bewegten Materie und nicht im Laborsystem definiert ist.

Die Gleichung für die Strahlungsenergie (1.49) gilt nur für ruhende Materie, d. h. nur in dem Bezugssystem, in dem die Materie lokal in Ruhe ist. Die Transformation auf ein System, in dem die Materie sich bewegt, muß relativistisch korrekt durchgeführt werden (Riffert 1986). In der nichtrelativistischen Näherung $v \ll c$ verschwinden nicht alle relativistischen Effekte dieser Transformation; es ergibt sich

$$\frac{D}{Dt} J + \frac{4}{3} J \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{F} = c \bar{\sigma}'_a (a T^4 - J) \quad . \quad (1.60)$$

Diese Gleichung ist plausibel, da sie bis auf den Absorptionsterm auf der rechten Seite die selbe Struktur wie Gleichung der Gesamtenergie (1.59) hat. Insbesondere hat der Term $\nabla \cdot \mathbf{v}$ als Vorfaktor die Enthalpedichte $4J/3$ der Strahlung.

Durch Kombination der Gleichungen (1.59) und (1.60) ergibt sich die Zeitentwicklung der inneren Energie der Materie:

$$\frac{D}{Dt} \varepsilon + (\varepsilon + p) \nabla \cdot \mathbf{v} = -c \bar{\sigma}'_a (a T^4 - J) \quad . \quad (1.61)$$

Damit ist sie der Gleichung für die innere Energie ohne Strahlung (1.11) sehr ähnlich; es wird nur zusätzlich die Absorption von Strahlungsenergie im Energiequellterm q_e berücksichtigt.

1.4 Zeitskalen in der Strahlungs-Hydrodynamik

Je mehr Einzelheiten eines Systems betrachtet werden, desto genauer das Ergebnis, so hofft man. Je mehr Einzelheiten betrachtet werden, desto mehr verschiedene Effekte müssen auch berücksichtigt werden. Diese Effekte spielen sich nicht unbedingt alle auf der gleichen Zeitskala ab.

Es gibt für gewöhnlich eine Skala, auf der sich die eigentlich interessante Größe ändert. Effekte, die weitaus langsamer ablaufen, werden gerne vernachlässigt: Sie wirken sich in

dieser kurzen Zeit nicht aus. Effekte, die weitaus schneller ablaufen, werden gerne gemittelt, unter der Annahme, daß deren Details nur kumulativ beitragen. In diesem einfachen Schema ergeben sich genau dann Probleme, wenn sich gewisse Effekte nicht nur auf einer Zeitskala, sondern — etwa räumlich verschieden — auf einem ganzen Skalenbereich abspielen.

In der Strahlungs-Hydrodynamik werden meistens mindestens Gravitation, Druck, Viskosität, Absorption (oder Emission) und Energietransport durch Strahlung betrachtet.

Gravitation. Im Schwerefeld eines massiven Zentralkörpers haben Teilchen auf benachbarten Bahnern unterschiedliche Geschwindigkeiten. Durch diese ist die Zeitskala $\Delta t = r/v_K$ mit dem Bahnradius r und der Keplergeschwindigkeit $v_K = \sqrt{GM/r}$ gegeben.

Druck. Eine typische Geschwindigkeit in Medien mit Druck ist die Schallgeschwindigkeit c_s . Zusammen mit der Ortsauflösung Δx ist die Zeitskala $\Delta t = \Delta x/c_s$ gegeben.

Absorption. Die mittlere freie Weglänge ist $\lambda = 1/\sigma$. Zwischen zwei Stößen bewegen sich die Photonen mit Lichtgeschwindigkeit. Eine typische Zeitskala für Absorption ist die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen mit $\Delta t = 1/c\sigma$.

Die Absorptions-Zeitskala ist ein Maß für die Zeit, die benötigt wird, um Strahlung zu thermalisieren, d. h. Strahlung und Materie in ein thermodynamisches Gleichgewicht zu bringen. Wenn sie sehr klein ist, kann vereinfachend davon ausgegangen werden, daß Strahlung und Materie stets im Gleichgewicht sind. Wenn sie sehr groß ist, ist auch die mittlere freie Weglänge sehr groß; dann verläßt die Strahlung das betrachtete Gebiet, ohne mit der Materie zu wechselwirken.

Je nach der Größenordnung der Parameter können diese Zeitskalen im betrachteten Gebiet variieren. Fatal ist beispielsweise oft, daß die Zeitskala der Gravitation mit dem Abstand vom Zentralkörper sinkt. Es ist sehr problematisch, gleichzeitig große und kleine Entfernung vom Zentralkörper zu betrachten, da die Teilchen auf inneren Bahnern sich viel schneller als solche auf den äußeren Bahnern bewegen. In einem solchen System kann die Gravitation dann weder vernachlässigt noch kann über sie gemittelt werden.

Kapitel 2

Der SPH-Formalismus

2.1 Grundlagen von SPH

Die Abkürzung SPH steht für “Smoothed Particle Hydrodynamics”, also „Hydrodynamik mit ausgeschmierten Teilchen“. Der SPH-Formalismus ist eine Diskretisierungsmethode, mit der partielle Differentialgleichung (die etwa in der Hydrodynamik auftreten) numerisch näherungsweise gelöst werden können.

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Methodik von SPH. Es legt weniger Wert auf Verbesserungen und Weiterentwicklungen von SPH als auf die zugrundeliegenden Prinzipien, die später auf die Darstellung von Strahlungsfeldern ausgeweitet werden. Eine äquivalente, aber leicht verschiedene Einführung wird in Monaghan (1992), Ott (1995) oder Speith (1998) dargestellt.

SPH wird typischerweise auf Anfangswertprobleme angewendet. Dabei ist von einer Funktion ein Anfangswert zu einem gewissen Zeitpunkt (die Anfangskonfiguration) sowie eine Zeitentwicklungsgleichung in Form einer Differentialgleichung bekannt. Durch numerische Methoden soll eine Näherung der Funktionswertes zu einem späteren Zeitpunkt bestimmt, d. h. die Differentialgleichung integriert werden.

2.1.1 Die SPH-Approximation

Im SPH-Formalismus wird eine Funktion $f^*(\mathbf{x})$ durch eine Approximation über endlich viele Stützstellen angenähert. Die approximierende Funktion $f(\mathbf{x})$ ist dabei keine Interpolierende, d. h. sie muß nicht durch die Stützstellen selbst gehen.¹ Im Gegensatz zu Gitter- oder Netzmethoden können diese Stützstellen fast beliebig angeordnet sein (Abbildung 2.1) und ihre Position im Laufe der Zeit verändern, ohne daß dabei eine innere Ordnung aufrecht erhalten werden muß.²

¹Es gibt zur Zeit Versuche, SPH-ähnliche Verfahren zu entwickeln, die zwischen den Stützstellen echt interpolieren, z. B. die *Shepard*-Interpolation mit singulären Kernen (Lancaster und Salkauskas 1981). Es ist zur Zeit nicht bekannt, ob dies für astrophysikalische Probleme zu signifikant besseren Ergebnissen führt.

²Natürlich muß beachtet werden, daß die Ortsauflösung von der Wahl der Stützstellenpositionen abhängt.

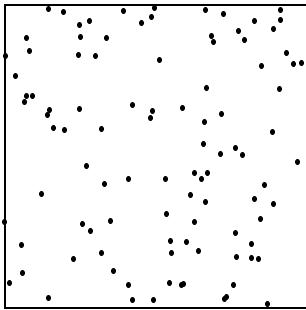


Abbildung 2.1: Eine mögliche Wahl der Stützstellen in zwei Dimensionen. Wie bei einer Monte-Carlo-Integration wurden die Positionen hier zufällig gewählt.

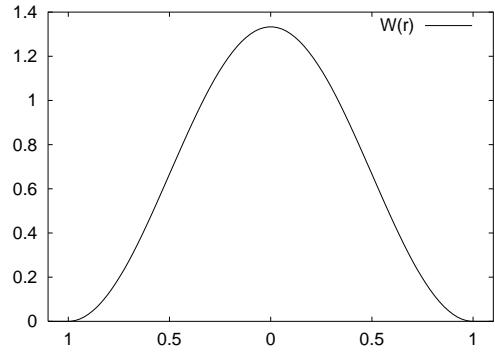


Abbildung 2.2: Ein häufig verwendeteter Kern ist ein kubischer Spline. Hier wird ein typischer radialer Verlauf gezeigt. Der Kern bestimmt den Dichteverlauf um eine ausgeschmierte Stützstelle.

Die SPH-Approximation ergibt sich, indem die Stützwerte um die Stützstellen ausgeschmiert werden. Die ausgeschmierte Form einer Stützstelle wird durch einen Kern W beschrieben (Abbildung 2.2). Der Kern ist gewöhnlich so beschaffen, daß die Ausschmierung an der Stützstelle selbst am dichtesten ist, und daß die Dichte mit größer werdendem Abstand auf null abfällt. Er muß die Normierung

$$\int dV W(\mathbf{r}) = 1 \quad (2.1)$$

erfüllen.

Der Radius (oder eine andere typische Abmessung) des Kerns wird als *Ausschmierlänge* h bezeichnet. Sie ist ein Maß für die erreichbare Ortsauflösung. In diesem Text wird angenommen, daß h konstant und für alle Stützstellen gleich ist.³ Die ausgeschmierten Raumbereiche um die Stützstellen überlappen sich.⁴ Dadurch wird jeder Stützstelle i ein effektives Volumen V_i zugeordnet, das kleiner ist als das Volumen des Kerns.

Die SPH-Approximation $f(\mathbf{x})$ einer Funktion $f^*(\mathbf{x})$ ist definiert durch

$$f(\mathbf{x}) = \sum_j V_j f_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.2)$$

Dabei ist f_j der Stützwert der Stützstelle j an der Position \mathbf{x}_j und V_j das zugeordnete Volumen. Der Kern $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ gibt das Gewicht der Stützstelle j am Ort \mathbf{x} an. Um den numerischen Aufwand in vertretbaren Grenzen zu halten, wählt man den Kern gerne kugelsymmetrisch als ein Spline über $|\mathbf{r}|$ mit einem kompakten Träger (Abbildung 2.2). Die Ausschmierlänge h gibt dann typischerweise den Radius des Trägers an.

³Die Ausführungen dieses Textes sind im Wesentlichen unabhängig von der Ausschmierlänge h . Die im folgenden vorgestellten Ideen können kanonisch auf ein räumlich oder zeitlich veränderliches h verallgemeinert werden.

⁴Je nach Zahl der Raumdimensionen sollten sich an jedem Ort etwa 10 bis 100 Kerne überlappen.

Da die Stützstellen beweglich sind, können die Volumina V_i im allgemeinen nicht als konstant angenommen werden. Aus geometrischen Überlegungen ergibt sich, daß die Relation

$$\frac{1}{V_i} \approx \sum_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.3)$$

erfüllt sein muß, da sonst in einem Raumgebiet zu viel oder zu wenig Volumen vorhanden ist. Diese Relation ergibt sich auch analytisch, indem die Größe $1/V$ mittels Gleichung (2.2) approximiert wird und dann für die Stützstelle i (d. h. an der Stelle \mathbf{x}_i) ausgewertet wird.

Die Relation (2.3) muß nicht exakt erfüllt werden. Es ist insbesondere möglich, die den Stützstellen zugeordneten Volumen nicht aus der Verteilung der Stützstellen zu berechnen, sondern eine Anfangskonfiguration vorzugeben und die Volumen mit einer Zeitentwicklungsleichung dV_i/dt entsprechend Gleichung (1.3) fortzuschreiben. Die Anfangskonfiguration kann dabei (innerhalb gewisser Grenzen) von der Beziehung (2.3) abweichen. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad kann besonders am Rand des Simulationsgebietes oder bei räumlich variierender Stützstellendichte vorteilhaft ausgenutzt werden.

Im SPH-Formalismus ist es üblich, die Stützstellengeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit der Materie zu wählen, also

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i \quad . \quad (2.4)$$

Dies führt zu einem Lagrangeschen Verfahren, d. h. eine Stützstelle beschreibt immer das gleiche Element der Materie. Dadurch wird verhindert, daß eine große numerische Diffusion eintritt. (Natürlich werden die Stützstellen unterhalb der Auflösungsgrenze dennoch Materie austauschen.) Die einer Stützstelle zugeordnete Masse ist dann konstant.

2.1.2 Diskussion der Qualität der Näherungen

Wie bei fast allen Diskretisierungen können große Gradienten in der Funktion f^* durch die Approximierende f nicht dargestellt werden. Ein Maß für den maximal darstellbaren Gradienten ist durch die Ausschmierlänge h gegeben; es ist $(\nabla f)_{max} \lesssim f^*/h$ (Abbildung 2.3).

Durch die Darstellung mit Kernen wird die Approximierende leicht wellenförmig (Abbildung 2.4). Die Wellenlänge ist abhängig von der Zahl der sich überlappenden Kerne. Sie ist jedoch kleiner als h und liegt somit unterhalb der erreichbaren Auflösung.⁵

Aus anschaulichen Gründen werden die Stützstellen auch als „Teilchen“ bezeichnet; das Überlappen von Kernen heißt dann „Wechselwirkung“. Die Zahl der sich überlappenden Kerne am Ort einer Stützstelle ist gleich der Anzahl der Wechselwirkungspartner eines Teilchens (minus eins); deshalb wird sie auch als Wechselwirkungszahl bezeichnet. Da mit wachsender Wechselwirkungszahl die Wellenlänge der Näherung abnimmt, ist diese ein weiteres Maß für die Güte der Approximation.

⁵Es gibt Versuche für Weiterentwicklungen von SPH, die konstante Funktionen exakt darstellen können, z. B. durch eine *Shepard*-Approximation (Lancaster und Salkauskas 1981).

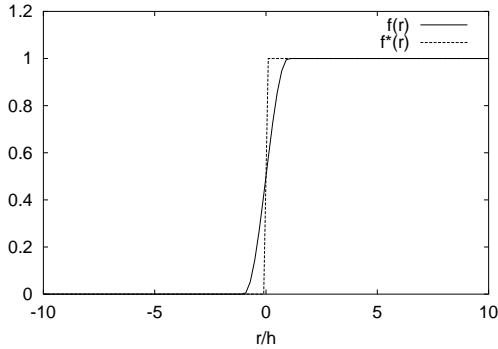


Abbildung 2.3: Die Stufenfunktion f^* kann durch die SPH-Näherung f nicht exakt dargestellt werden. Alle Gradienten werden über die Länge h ausgeschmiert.

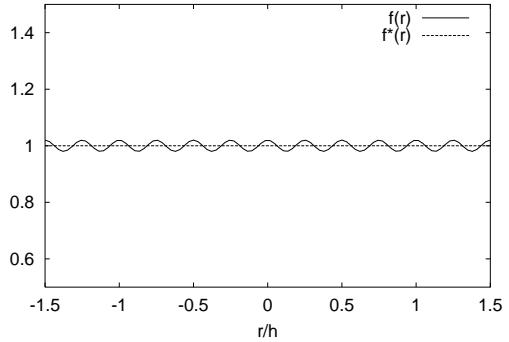


Abbildung 2.4: Die SPH-Näherung ist aus Kernen zusammengesetzt. Selbst eine konstante Funktion kann nicht exakt dargestellt werden. Die typische Wellenlänge liegt jedoch unterhalb der Auflösungsgrenze des Verfahrens, die durch die Ausschmierlänge h gegeben ist.

Es bleibt die Frage, inwieweit die Approximierende f eine Näherung der Funktion f^* darstellt. Gewöhnlich wird argumentiert, daß ein Grenzübergang $N \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$ bei festgehaltener Wechselwirkungszahl zum Kontinuumsbild führt. Dabei geht die in der SPH-Approximation auftretende Summe in ein Integral und der in der Approximation auftretende Kern $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ in eine Delta-Distribution über. Weiter hofft man, daß selbige im Sinne einer nicht näher bezeichneten geeigneten Integralnorm eine Basis für den Raum aller physikalischer Funktionen darstellen. Leider sind ausreichende mathematische Untersuchungen heute nicht bekannt.

Durch die Welligkeit der Approximierenden für endliches N ist die Klasse der exakt darstellbaren Funktionen sehr beschränkt, und zudem beschränkt auf recht komplizierte Funktionen. Von Vorteil ist jedoch, daß die SPH-Summation linear ist; Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Approximierenden werden nur durch den Kern bestimmt.

2.1.3 Ableitungen

Die Ortsableitung der Approximierenden f lautet

$$\nabla f \Big|_{\mathbf{x}} = \sum_j V_j f_j \nabla W \Big|_{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j} , \quad (2.5)$$

was im folgenden auch einfacher

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_j V_j f_j \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (2.6)$$

geschrieben wird.

Als Beispiel wird hier die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik in den SPH-Formalismus übertragen. Da die Stützstellen mit der Geschwindigkeit der Materie bewegt werden, bietet sich das Lagrange-Bild besonders an.

Wenn die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \varrho = -\varrho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.7)$$

für die Stützstelle i ausgewertet und für \mathbf{v} die Approximation am Ort \mathbf{x}_i eingesetzt wird,⁶ ergibt dies

$$\frac{d}{dt} \varrho_i = -\varrho_i \sum_j V_j \mathbf{v}_j \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.8)$$

Diese Gleichung ist leider nicht brauchbar. Die Kombination von Geschwindigkeits- und Stützstellendichtefluktuationen führt dazu, daß die Gesamtmasse nicht erhalten ist.

Statt Gleichung (2.7) kann auch die mathematisch äquivalente Formulierung

$$\frac{d}{dt} \varrho = -\varrho (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla 1) \quad (2.9)$$

verwendet werden. Dies führt zu

$$\frac{d}{dt} \varrho_i = -\varrho_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.10)$$

Die konstante Funktion 1 wird hier durch die SPH-Approximation $\sum_j V_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ dargestellt. Diese Näherung ist wegen der Eigenschaften der Volumina V_j und der Normierung des Kerns W plausibel; sie ist jedoch nicht exakt. Im allgemeinen ist $\sum_j V_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \neq 1$.

Im Gegensatz zu einer direkten Übersetzung der Kontinuitätsgleichung erhält die Formulierung (2.10) die Gesamtmasse. Außerdem ist diese Formulierung Galilei-invariant und damit eleganter. Aus solchen und ähnlichen Umformungen von Ableitungen lassen sich wichtige Freiheitsgrade im SPH-Formalismus gewinnen, die dazu verwendet werden können, das Verfahren zu stabilisieren.

2.1.4 Die Volumengleichung

Für das einer Stützstelle zugeordnete Volumen kann ebenfalls eine Zeitentwicklungsgleichung aufgestellt werden. Um die Formulierung konsistent zu halten, soll dazu wieder das Lagrange-Bild verwendet werden. Gleichung (1.3)

$$\frac{d}{dt} V = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV' \quad (2.11)$$

beschreibt die Zeitentwicklung eines Volumenelements, das sich mit der Materie mitbewegt. Unter der Annahme, daß dieses Volumenelement durch eine einzige Stützstelle repräsentiert wird, ist der Integrand räumlich konstant. Dies führt zu

$$\frac{d}{dt} V = V \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (2.12)$$

⁶Das genaue Vorgehen ist hier hauptsächlich aus der Anschauung motiviert.

was analog zur Kontinuitätsgleichung als

$$\frac{d}{dt} V = V (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla 1) \quad (2.13)$$

geschrieben werden kann. Die SPH-Formulierung der Volumengleichung hat dann die Galilei-invariante Gestalt

$$\frac{d}{dt} V_i = V_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.14)$$

Man beachte die Ähnlichkeit zur SPH-Formulierung der Kontinuitätsgleichung. Da sowohl die Gesamtmasse als auch die Anzahl der Stützstellen konstant ist, gelten für die Dichte ϱ und die Stützstellendichte $1/V$ äquivalente Entwicklungsgleichungen.

2.2 Einfache Hydrodynamik im SPH-Formalismus

Statt der Kontinuums-Größen ϱ , \mathbf{v} und p können auch Kombinationen oder Funktionen derselben zur Darstellung des Zustandes des Systems verwendet werden. Üblich ist besonders, vom Druck p auf die Dichte der inneren Energie ε überzugehen.

Die Größen, die zur Darstellung des Systems verwendet werden, können als *Basisgrößen* bezeichnet werden. Alle anderen Größen des Systems können als Funktionen dieser Basisgrößen ausgedrückt werden. Die Wahl der Basisgrößen ist ein weiterer Freiheitsgrad im SPH-Formalismus. Die Zeitentwicklungsgleichungen werden in den Basisgrößen formuliert. Die Approximierenden der abgeleiteten Größen ergeben sich aus den Approximierenden der Basisgrößen. Basisgrößen werden also typischerweise exakter dargestellt als abgeleitete Größen.

Eine mögliche Wahl für die Basisgrößen lautet $(\varrho, \mathbf{v}, \varepsilon)$. Es ist (s. o.) sinnvoll, deren Zeitentwicklungsgleichungen im Lagrange-Bild etwa folgendermaßen umzuformulieren:

$$\frac{d}{dt} \varrho = -\varrho (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla 1) \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} (\nabla p + p \nabla 1) \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -(\varepsilon + p) (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla 1) \quad (2.17)$$

Dies führt im SPH-Bild zu den SPH-Zeitentwicklungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \varrho_i = -\varrho_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = -\frac{1}{\varrho_i} \sum_j V_j (p_j + p_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_i = -(\varepsilon_i + p_i) \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.20)$$

Die etwas willkürlich erscheinenden Terme $(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)$ und $(p_j + p_i)$ dienen der Galilei-Invarianz beziehungsweise der Stabilität. Der physikalisch ebenso legale Term $(p_j - p_i)$ ist instabil und damit numerisch nicht sinnvoll. (Eine Faustregel lautet, daß Drücke zu addieren und Spannungen zu subtrahieren sind.)

Es ist vorteilhaft, statt dieser Größen den Satz (m_i, \mathbf{v}_i, e_i) zu verwenden. Diese Größen bedeuten

$$\begin{aligned} m_i &= \varrho_i V_i && \text{zugeordnete Masse} \\ \mathbf{v}_i & && \text{Geschwindigkeit des Kontinuums} \\ e_i &= \varepsilon_i / \varrho_i && \text{spezifische innere Energie} \end{aligned}$$

Für die Zeitableitungen dieser Größen gelten schließlich die SPH-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} m_i = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = -\frac{1}{\varrho_i} \sum_j V_j (p_j + p_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} e_i = -\frac{p_i}{\varrho_i} \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.23)$$

Außerdem gilt für die Diskretisierungsgrößen, die keine direkte physikalische Interpretation haben:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt} V_i = V_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.25)$$

Zusätzlich werden noch je eine Zustandsgleichung für p_i und T_i benötigt.

Dieser Satz von Größen hat unter anderem den Vorteil, daß die Zeitentwicklung der Masse besonders einfach ist. Wegen $d\mathbf{x}_i/dt = \mathbf{v}_i$ bewegen sich die Stützstellen mit der Geschwindigkeit der Materie. Dadurch wird das Verfahren Lagrangesch mit $dm_i/dt = 0$.

2.2.1 Erhaltungsgrößen

Masse

Die Gleichung $dm_i/dt = 0$ (2.21) läßt schon vermuten, daß die Gesamtmasse erhalten ist. Integration der Dichte über den gesamten Raum V liefert

$$\begin{aligned} M &= \int_V dV' \varrho(\mathbf{x}') = \int_V dV' \sum_i m_i W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) \\ &= \sum_i m_i \int_V dV' W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) = \sum_i m_i \end{aligned} \quad (2.26)$$

wegen der Normierung des Kerns und damit

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \sum_i m_i = 0 \quad (2.27)$$

Somit ist die Gesamtmasse erhalten.

Impuls

Die Bewegungsgleichung (2.22) entspricht einem Kraftgesetz, das aus Paar-Wechselwirkungen besteht und das antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung von i und j ist. Dies lässt schon vermuten, daß $actio = reactio$ gilt und damit der Gesamtmomentum erhalten ist. Eine genauere Rechnung zeigt

$$\mathbf{p} = \int_V dV' \varrho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{x}') = \int_V dV' \sum_i V_i \varrho_i \mathbf{v}_i W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) , \quad (2.28)$$

da \mathbf{v}_i so definiert ist, daß $\varrho_i \mathbf{v}_i$ die Impulsdichte der Stützstelle i bezeichnet. Also gilt

$$\mathbf{p} = \sum_i V_i \varrho_i \mathbf{v}_i \int_V dV' W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) = \sum_i V_i \varrho_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (2.29)$$

wegen der Normierung des Kerns und damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{p} &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \\ &= - \sum_i m_i \frac{1}{\varrho_i} \sum_j V_j (p_j + p_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ &= - \sum_{i,j} V_i V_j (p_j + p_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

wegen der Antisymmetrie des Summanden bezüglich der Vertauschung von i und j . Somit ist der Gesamtmomentum erhalten. Dies ist auch die eigentliche Begründung dafür, daß die Drücke zu $(p_j + p_i)$ symmetrisiert werden.

Energie

Die Gesamtenergie setzt sich aus kinetischer und innerer Energie zusammen. Es gilt

$$\begin{aligned} E &= \int_V dV' \left(\frac{1}{2} \varrho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{x}')^2 + \varrho(\mathbf{x}') e(\mathbf{x}') \right) \\ &= \int_V dV' \sum_i V_i \left(\frac{1}{2} \varrho_i \mathbf{v}_i^2 + \varrho_i e_i \right) W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + m_i e_i \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

wegen der Normierung des Kerns und damit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E &= \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + m_i e_i \right) \\
&= - \sum_i \left(m_i \mathbf{v}_i \frac{1}{\varrho_i} \sum_j V_j (p_j + p_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right. \\
&\quad \left. + m_i \frac{p_i}{\varrho_i} \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right) \\
&= - \sum_{i,j} V_i V_j (\mathbf{v}_i (p_j + p_i) + p_i (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\
&= - \sum_{i,j} V_i V_j (p_i \mathbf{v}_j + p_j \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

wegen der Antisymmetrie des Summanden bezüglich der Vertauschung von i und j . Somit ist die Gesamtenergie erhalten.

2.2.2 Künstliche Viskosität

Die Eulergleichung enthält als Lösungen auch Stoßfronten, also Lösungen mit einer Unstetigkeit, in der Entropie erzeugt wird. Da die Lösungen von numerischen Verfahren im allgemeinen keine Unstetigkeiten enthalten können, muß die Eulergleichung modifiziert werden, so daß die Unstetigkeiten über einen kleinen Raumbereich ausgeschmiert und damit eliminiert werden.

Ein oft gebrauchter Ansatz dafür ist eine zusätzliche *künstliche Viskosität*. Das ist eine zusätzliche Beschleunigung $d\mathbf{v}^*/dt$, die nur wirksam wird, wenn die Materie komprimiert wird. Bei Expansion verschwindet diese Beschleunigung.

Von Monaghan (1992) stammt der phänomenologische Ansatz

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i^* = - \sum_j \frac{m_j}{\frac{1}{2}(\varrho_i + \varrho_j)} \Pi_{ij} \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \tag{2.33}$$

$$\text{mit } \Pi_{ij} = \beta h^2 [\min\{\mu_{ij}, 0\}]^2 \tag{2.34}$$

$$\text{und } \mu_{ij} = \frac{\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{v}}{(\Delta \mathbf{x})^2 + \eta h^2} . \tag{2.35}$$

Dabei ist $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ und $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$. Die Konstante β hat Dimension und Größenordnung 1; sie bestimmt die Stärke der Dämpfung. Eine typische Wahl ist $\beta = 1$. Die Konstante $\eta \ll 1$ sorgt dafür, daß der Nenner nicht null wird; eine typische Wahl ist $\eta = 0.01$.

Die künstliche Viskosität vernichtet kinetische Energie. Um die Energiebilanz auszugleichen, muß ein entsprechender Term zur inneren Energie addiert werden:

$$\frac{d}{dt} e_i^* = \frac{1}{2} \sum_j \frac{m_j}{\frac{1}{2}(\varrho_i + \varrho_j)} \Pi_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) . \tag{2.36}$$

2.2.3 Höhere Ableitungen

Zweite und höhere Ableitungen einer Funktion f^* können prinzipiell berechnet werden, indem die entsprechende Ableitung der Approximation f gebildet wird:

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_j V_j f_j \Delta W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.37)$$

Es ist jedoch üblich (Monaghan 1992), stattdessen eine Hilfsfunktion $\mathbf{g}^* = \nabla f^*$ zu approximieren

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_j V_j f_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.38)$$

und diese in der Darstellung von Δf zu verwenden:

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_j V_j \mathbf{g}_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.39)$$

Diese Vorgehensweise hat unter anderem den Vorteil, daß der Kern weniger oft differenzierbar sein muß.

2.3 Strahlung im SPH-Formalismus

Viele Ansätze für die Darstellung der hydrodynamischen Gleichungen im SPH-Formalismus, die dem oben vorgeführten sehr ähnlich sind, wurden mittlerweile gut getestet. Es gibt bisher zwar keine zufriedenstellende Analyse der Fehler der Näherungen, aber Experimente weisen darauf hin, daß SPH zuverlässig ist.

Da es keine mathematische SPH-Theorie gibt, wird die Herleitung der SPH-Gleichungen für die Darstellung von Strahlung in der Diffusions-Näherung physikalisch-intuitiv begründet.

2.3.1 Darstellung des Strahlungsfeldes

Eine neue Stützgröße J_i stellt die Energiedichte des Strahlungsfeldes dar. In der Diffusionsnäherung (siehe Abschnitt 1.2.6) ergeben sich aus ihr der Strahlungsdruck und der Strahlungsfluß.

Der Strahlungsdruck

Der Strahlungsdruck für die Stützstelle i ist nach Gleichung (1.51) gegeben durch $J_i/3$.

Der Strahlungsfluß

Sinnvoll für SPH umformuliert lautet die Gleichung des Strahlungsflusses (1.50)

$$\mathbf{F} = -\frac{c}{\bar{\sigma}'_a + \bar{\sigma}_s} \frac{1}{3} (\nabla J - J \nabla 1) \quad . \quad (2.40)$$

Daraus folgt die SPH-Gleichung

$$\mathbf{F}_i = -\frac{c}{(\bar{\sigma}'_a + \bar{\sigma}_s)_i} \sum_j V_j \frac{1}{3} (J_j - J_i) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (2.41)$$

Seltsamerweise muß in dieser Gleichung der Strahlungsdruck antisymmetrisiert werden. Die Faustregel, daß Drücke zu addieren und Spannungen zu subtrahieren sind, gilt hier nicht; Experimente zeigen, daß die Formulierung $(J_j + J_i)/3$ instabil ist.

2.3.2 Die Zeitentwicklungsgleichungen

Durch die Anwesenheit des Strahlungsfeldes ändern sich Gesamtdruck und Dichte der gesamten inneren Energie. Der Gesamtdruck an der Stützstelle i ist

$$(p_{tot})_i = p_i + \frac{1}{3} J_i \quad , \quad (2.42)$$

und die Dichte der gesamten inneren Energie ist dort

$$(\varepsilon_{tot})_i = \varepsilon_i + J_i \quad . \quad (2.43)$$

Die Zeitentwicklungsgleichungen aus Abschnitt 1.3 können wie in Abschnitt 2.2 umformuliert werden zu

$$\frac{d}{dt} \varrho = -\varrho (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla 1) \quad (2.44)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} \left(\nabla \left[p + \frac{1}{3} J \right] + \left[p + \frac{1}{3} J \right] \nabla 1 \right) \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -(\varepsilon + p) (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla 1) - c \bar{\sigma}'_a (a T^4 - J) \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} J = -\frac{4}{3} J (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla 1) - (\nabla \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla 1) + c \bar{\sigma}'_a (a T^4 - J) \quad . \quad (2.47)$$

Daraus folgen die SPH-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \varrho_i = -\varrho_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = -\frac{1}{\varrho_i} \sum_j V_j (p_j + p_i + \frac{1}{3} [J_j + J_i]) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varepsilon_i = & -(\varepsilon_i + p_i) \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ & - c (\bar{\sigma}'_a)_i (a T_i^4 - J_i) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i = & -\frac{4}{3} J_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ & - \sum_j V_j (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ & + c (\bar{\sigma}'_a)_i (a T_i^4 - J_i) \quad . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Der Strahlungsdruck $J/3$ in der Bewegungsgleichung wird hier wie der Druck der Materie zu $(J_j + J_i)/3$ symmetrisiert.

Der Strahlungsfluß \mathbf{F} ist einem Energiefluß $J\mathbf{v}$ ähnlich. Dies macht den Term $(\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i)$ plausibel. Die Formulierung $(\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_i)$ hingegen ist, wie Experimente zeigen, nicht stabil.

Statt der Variablen Massendichte ϱ_i und Energiedichte ε_i können wie in Abschnitt 2.2 auch die Masse $m_i = \varrho_i V_i$ und spezifische innere Energie $e_i = \varepsilon_i / \varrho_i$ verwendet werden. Der gesamte Satz der SPH-Zeitentwicklungsleichungen für Materie mit Strahlung lautet dann

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i \quad (2.52)$$

$$\frac{d}{dt} V_i = V_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{dt} m_i = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = -\frac{1}{\varrho_i} \sum_j V_j (p_j + p_i + \frac{1}{3}[J_j + J_i]) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_i &= -\frac{p_i}{\varrho_i} \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ &\quad - \frac{1}{\varrho_i} c (\bar{\sigma}'_a)_i (a T_i^4 - J_i) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i &= -\frac{4}{3} J_i \sum_j V_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ &\quad - \sum_j V_j (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ &\quad + c (\bar{\sigma}'_a)_i (a T_i^4 - J_i) \quad . \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.3.3 Erhaltungsgrößen

Masse und Impuls sind in dieser Formulierung immer noch Erhaltungsgrößen. Der Beweis geschieht analog zu Abschnitt 2.2.1.

Nicht-Erhaltung der Gesamtenergie

Die Gesamt-Energiedichte beträgt $(\varrho \mathbf{v}^2 / 2 + \varrho e + J)$. Damit ist die Gesamt-Energie

$$\begin{aligned} E &= \int_V dV' \left(\frac{1}{2} \varrho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{x}')^2 + \varrho(\mathbf{x}') e(\mathbf{x}') + J(\mathbf{x}') \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + m_i e_i + V_i J_i \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

und die Ableitung der Gesamtenergie nach der Zeit ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E &= \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + m_i e_i + V_i J_i \right) \\ &= \dots = \sum_{i,j} V_i V_j (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \neq 0 \quad .\end{aligned}\quad (2.59)$$

Die Gesamtenergie ist wegen des Flußterms nicht erhalten. Der Beweis verläuft analog zu Abschnitt 2.2.1; auch hier entsteht nach dem Einsetzen der Ableitungen eine Doppelsumme über Terme, die bis auf den Flußterm antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung von i und j sind. Der Summand, der den Strahlungsfluß enthält, ist symmetrisch und verschwindet nicht. Das kann im Inneren eines Objekts dazu führen, daß die Energieerhaltung verletzt wird. An der Oberfläche eines Objektes ist es hingegen sogar notwendig, daß die Energie nicht erhalten ist, da der abgestrahlte Fluß dem System verlorengeht.

2.3.4 Flußbegrenzung

Die Flußbegrenzung (1.56) kann direkt übernommen werden:

$$\mathbf{F}_i^* = \frac{1}{1 + \frac{2|\mathbf{F}_i|}{c J_i}} \mathbf{F}_i \quad .\quad (2.60)$$

Sie wird auf den Fluß angewandt, nachdem er mittels (2.41) bestimmt wurde.

2.3.5 Oberflächen

Um den Strahlungsfluß an der Oberfläche als Randbedingung vorgeben zu können (siehe 1.2.9), muß der Rand des Simulationsgebietes erkannt werden. Dies ist in SPH nicht trivial, da die Stützstellen sich bewegen und der Rand sich dadurch dauernd verändert. Es können sogar nicht einfach zusammenhängende oder gar nicht zusammenhängende Gebiete entstehen.

Oberflächen können andere Oberflächen beleuchten. Eine zuverlässige Erkennung und Behandlung müßte die Beziehungen aller Oberflächen zueinander berücksichtigen⁷ und wäre sehr aufwendig. Abstrahlen aus dem Simulationsgebiet heraus dürfen nur die Oberflächen, die aus dem Unendlichen sichtbar sind. Eine zuverlässige Erkennung und Behandlung wäre ebenfalls sehr aufwendig.⁸

Wünschenswert für SPH ist aus Geschwindigkeitsgründen ein lokaler Algorithmus, d. h. ein Algorithmus, der zur Bestimmung der Abstrahlung eines Ortes nur dort lokal definierte Größen verwendet. Ein solcher kann globale Eigenschaften wie gegenseitige Beleuchtung leider nicht korrekt behandeln. Die hier verwendete Methode kann nur für einfache, einfach zusammenhängende, konvexe Simulationsgebiete funktionieren.

Für eine Oberflächenerkennung muß aus einer Menge von Stützstellen \mathbf{x}_i für jede Stützstelle i ein Vektor \mathbf{n}_i ermittelt werden, der angibt, ob dort eine Oberfläche liegt und

⁷Dies entspräche einem Radiosity-ähnlichen Verfahren.

⁸Dies entspräche einem Raytracing-ähnlichen Verfahren.

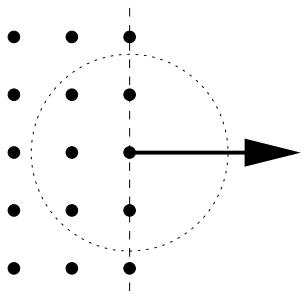


Abbildung 2.5: Stützstellenverteilung am geraden Rand

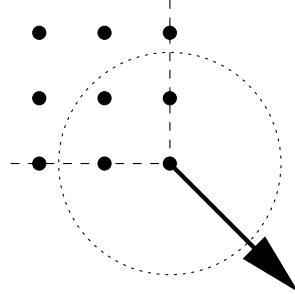


Abbildung 2.6: Stützstellenverteilung an einer konkaven Kante

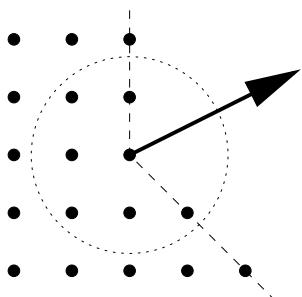


Abbildung 2.7: Stützstellenverteilung an einer konvexen Kante

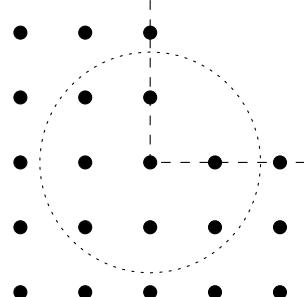


Abbildung 2.8: Stützstellenverteilung, die einen Grenzfall enthält

in welche Richtung die Oberfläche gegebenenfalls zeigt (Normalenvektor). Der Betrag von \mathbf{n}_i gibt die Oberflächendichte an, d. h. welcher Anteil der Stützstelle dort wirklich an der Oberfläche liegt.

Ein erster Ansatz für eine Oberflächenerkennung ist

$$\mathbf{n}_i = -\alpha h \frac{\nabla n}{n} \quad (2.61)$$

mit der Stützstellendichte n , der Ausschmierlänge h , einer Kern-abhängigen Konstanten $\alpha \approx W(0)$ sowie der üblichen SPH-Definition des Gradienten $\nabla a_i = \sum_j V_j a_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$.

Der nach (2.61) definierte Normalenvektor \mathbf{n}_i ist für eine homogene, dichte, quaderförmige, gitterartige, kartesische Stützstellenverteilung **0** im Inneren und ungefähr gleich dem Oberflächen-Normalenvektor für die äußeren Stützstellen. Für andere Stützstellenverteilungen (also für alle außer einigen Anfangskonfigurationen) wird \mathbf{n}_i zu groß. Jede Unregelmäßigkeit in der Stützstellendichte (und solche gibt es immer, da sich Stützstellen ja bewegen) führt dazu, daß der Zähler in (2.61) ungleich **0** wird; so wird eine Oberfläche fälschlicherweise auch im Inneren detektiert.

Um dies zu beheben, muß der Oberflächenvektor \mathbf{n}_i noch einer Plausibilitätskontrolle unterworfen werden. Dazu soll zuerst definiert werden, welche (lokalen) Stützstellenverteilungen überhaupt eine Oberfläche darstellen (siehe Abbildungen 2.5 bis 2.8).

Eine einfache Methode besteht darin, die Winkel zwischen dem wie oben erhaltenen Oberflächenvektor und den Verbindungslien zu den benachbarten Stützstellen zu prüfen.

Abhängig von diesen Winkeln kann der Oberflächenvektor verkürzt werden (um Selbstbeleuchtung zu berücksichtigen) oder auf null gesetzt werden (wenn der Winkel so klein ist, daß keine Oberfläche vorhanden ist). Diese Methode konnte allerdings noch nicht getestet werden, da noch keine zweidimensionalen Simulationen durchgeführt wurden.

Zuviel erkannte Oberflächen im Inneren haben schlechtere Auswirkungen als zuwenig erkannte Oberflächen am Rand. Wenn im Inneren zuviel Oberfläche erkannt wird, geht im ganzen Volumen Energie verloren. Wenn am Rand keine Oberfläche erkannt wird, entspricht dies nur einer kleinen Verschiebung des Randes nach außen.

Als Beispiel soll eine Stützstelle in zwei Dimensionen mit 20 Nachbarn betrachtet werden. Wenn diese Nachbarn isotrop verteilt sind, ergibt sich ein Winkel von etwa 20° zwischen den Sichtlinien zweier benachbarter Nachbarn. Wenn der Winkel zwischen Normalenvektor und Sichtlinie kleiner ist als etwa 15° , darf also keine Oberfläche mehr detektiert werden, da sonst im Inneren allein wegen der Fluktuation der Stützstellenpositionen fälschlicherweise Oberflächen erkannt würden.

Wenn \mathbf{n}^* den korrigierten Oberflächendichtvektor bezeichnet, ist der Fluß durch die Oberfläche dann gegeben durch

$$\mathbf{F}_i^+ = \frac{c}{2} J_i V_i \mathbf{n}_i^* . \quad (2.62)$$

Das Volumen V_i ist notwendig, um aus der Oberflächendichte \mathbf{n}_i^* die Oberfläche zu erhalten.

Kapitel 3

Implementierung

3.1 Numerische Darstellung der SPH-Größen

Um Probleme der Strahlungs-Hydrodynamik mittels SPH zu bearbeiten, müssen die SPH-Größen numerisch repräsentiert werden. Dazu wird hier angenommen, daß die Materie aus einem Gas besteht, das durch die Größen Dichte, Geschwindigkeit und spezifische innere Energie beschrieben wird. Das Strahlungsfeld wird in der Diffusionsnäherung behandelt; dabei wird es allein durch die Strahlungs-Energiedichte beschrieben.

3.1.1 Größen der SPH-Darstellung

Die oben genannten Größen Dichte, Geschwindigkeit, spezifische innere Energie und Strahlungs-Energiedichte sind *Basisgrößen* der Darstellung. Alle anderen Größen wie Druck, Temperatur, Opazitäten, Strahlungsfluß als auch die Zeitableitungen der Basisgrößen sind durch die Basisgrößen vollständig festgelegt.

Für die Darstellung im SPH-Formalismus sind ferner die Positionen der Stützstellen sowie (zumindest in der hier gewählten SPH-Formulierung) deren zugeordnete Volumen erforderlich. Auch sie sind Basisgrößen im SPH-Formalismus.

Zusammengefaßt ergibt dies für jede Stützstelle den folgenden Satz von Basisgrößen:

Position	\mathbf{x}	Vektor
Volumen	V	Skalar
Masse	m	Skalar
Geschwindigkeit	\mathbf{v}	Vektor
Spezifische innere Energie	e	Skalar
Strahlungs-Energiedichte	J	Skalar

Die Masse ist dabei ein Spezialfall, da sich wegen $dm_i/dt = 0$ die einer Stützstelle zugeordnete Masse normalerweise nicht ändert. (Sie ändert sich nur, wenn in der Umgebung der Stützstelle Quellen oder Senken für die Masse vorhanden sind.)

Aus diesen Basisgrößen lassen sich unter anderem die folgenden abgeleiteten Größen herleiten:

(folgt aus)			
Druck	p	Skalar	Zustandsgleichung
Temperatur	T	Skalar	kalorische Zustandsgleichung
Mittlere Opazitäten	$\bar{\kappa}$	Skalar	quantenmechanische Eigenschaften
Strahlungsfluß	\mathbf{F}	Vektor	Diffusionsgleichung

Die Zeitentwicklungsgleichungen für die Basisgrößen im SPH-Formalismus werden in Kapitel 2 beschrieben und motiviert.

3.1.2 Numerische Auswertung einer SPH-Darstellung

Die SPH-Approximation $f(\mathbf{x})$ einer Größe $f^*(\mathbf{x})$ lautet nach (2.2):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j f_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad . \quad (3.1)$$

Dabei ist N die Anzahl der Stützstellen. Die Ausdrücke zur Berechnung der Zeitableitung eines Stützwertes f_i haben die Form

$$\frac{d}{dt} f_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad . \quad (3.2)$$

Der Summand A_{ij} enthält meist einen Faktor $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ oder $\nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$. Wegen des kompakten Trägers des Kerns W ist A_{ij} nur dünn besetzt. Paare mit $A_{ij} \neq 0$ heißen *Wechselwirkungspartner* (siehe Abschnitt 2.1.2). Wegen der Form des hier gewählten Kerns haben Wechselwirkungspartner einen Abstand kleiner als h :

$$A_{ij} \neq 0 \implies W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \neq 0 \implies |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < h \quad . \quad (3.3)$$

Die Berechnung der Summation über j kann stark beschleunigt werden, wenn zuvor die meisten der Paare (i, j) aussortiert werden, für die A_{ij} verschwindet. Eine Möglichkeit dazu besteht darin, die Stützstellen nach ihren Positionen in ein räumliches Gitter einzusortieren. Stützstellen in weit entfernten Gitterzellen können dann nicht miteinander wechselwirken. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Stützstellen in einen räumlich organisierten Baum einzusortieren und diesen zu durchqueren.

3.2 Numerische Behandlung von Anfangswertproblemen

Physikalische Probleme werden häufig in der Form von Anfangswertproblemen gestellt. Dabei ist von einer Funktion sowohl die Ableitung (als Funktion) als auch der Wert an einer bestimmten Stelle (der Anfangswert) bekannt. Gesucht ist der Funktionswert an einer gewissen anderen Stelle. (Siehe etwa Press et al. 1992, Kapitel 16.) Schematisch wird dies dargestellt durch

Funktion:	$y(x)$	(unbekannt)
Gegeben:	$y_0 = y(x_0)$	(Anfangswert)
	$f(x, y) = dy/dx$	(Ableitung)
Gesucht:	$y_1 = y(x_1)$	(Endwert)

Die Lösung dieses Problems heißt auch *Integration* des Problems.

3.2.1 Explizite Verfahren

Die wohl einfachste Methode geht auf *Euler* zurück. Man entwickelt die unbekannte Funktion $y(x)$ nach Taylor um x_0 . Dann gilt nach Fischer und Kaul (1990), Kapitel III, §9.7 (sei o. B. d. A. $x_0 < x_1$):

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) + y''(x^*) \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \quad (3.4)$$

mit $x^* \in [x_0, x_1]$ oder

$$y_1 = y_0 + \Delta x f(x_0, y_0) + O(\Delta x^2) \quad (3.5)$$

mit $\Delta x = x_1 - x_0 > 0$. (Dies ist nicht ganz korrekt, da x^* gewöhnlich von x_1 abhängt.) Wenn der Term $O(\Delta x^2)$ vernachlässigt wird, sind alle Größen auf der rechten Seite von (3.5) bekannt.

Die Vorschrift (3.5) liefert keine besonders gute Approximation von y_1 . Durch mehrfaches Auswerten von f an verschiedenen Stellen und geschicktes Kombinieren kann die Ordnung des Fehlers verkleinert werden. Eine Verbesserung ist z. B. die Mittelpunkts-Methode mit der Vorschrift

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x f(x_0, y_0) \\ k_2 &= \Delta x f(x_0 + \Delta x/2, y_0 + k_1/2) \\ y_1 &= y_0 + k_2 + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad . \quad (3.6)$$

Die Mittelpunkts-Methode ist damit um eine Ordnung genauer, um die Kosten einer weiteren Auswertung der Ableitung f .

Um von der Stelle x_0 zu einer anderen Stelle x_n zu gelangen, ist es manchmal notwendig, nicht nur einen, sondern mehrere Schritte mit kleinerer Schrittweite in Folge zu gehen. Das Resultat y_1 des ersten Schrittes dient dann als Ausgangswert für den nächsten Schritt. Die Wahl der Schrittweite Δx gibt die lokale Genauigkeit des Verfahrens vor. Jeder Schritt wird so gewählt, daß der Fehler bei diesem Schritt kleiner als eine gewisse Schranke ε wird. Um eine Abschätzung für diesen Fehler zu erhalten, kann beispielsweise ein Schritt durch zwei Schritte mit halber Schrittweite ersetzt werden, um das Ergebnis mit dem ganzen Schritt zu vergleichen.

Eine automatische Schrittweitensteuerung ist heute Standard. Dabei wird der Integrator von einem Regler gesteuert, der die Schrittweite so wählt, daß sowohl die Rechenzeit möglichst klein wird als auch der Fehler je Schritt unter die Fehlerschranke fällt. Nötigenfalls wird ein Schritt mit kleinerer Schrittweite wiederholt.

Bekannt ist besonders das *Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren vierter Ordnung*. Dabei wird die Ableitung f sechsmal ausgewertet. Dies ergibt eine Approximation, die bis auf Terme vierter Ordnung genau ist. Gleichzeitig liefert es eine Abschätzung des Fehlers fünfter Ordnung. Dadurch entfällt die (teure) Schrittweitenhalbierung zur Fehlerbestimmung.

Bei den eben beschriebenen Verfahren sind alle Größen, die zur Bestimmung des Approximationswertes benötigt werden (also etwa die rechte Seite von (3.5)), bekannt oder können direkt berechnet werden. Deshalb werden sie auch als *explizite* Verfahren bezeichnet. Explizite Verfahren sind relativ einfach zu implementieren, intuitiv (und damit leicht zu verstehen) und generell kostengünstig.

3.2.2 Steife Differentialgleichungen

Gewisse Funktionen lassen sich mit expliziten Verfahren leider nur sehr schlecht integrieren. Die fallende Exponentialfunktion

$$y(x) = e^{-\alpha x} \quad y'(x) = -\alpha y(x) \quad (3.7)$$

mit $\alpha > 0$ ist ein gerne zitiertes Beispiel dafür (Press et al. 1992, Kapitel 16.6).

Das Euler-Verfahren liefert für die fallende Exponentialfunktion die Approximation

$$y_1 = y_0 + \Delta x f(x_0, y_0) = (1 - \alpha \Delta x) y_0 \quad . \quad (3.8)$$

Wenn n Schritte der Schrittweite Δx ausgeführt werden, ergibt dies

$$y_n = (1 - \alpha \Delta x)^n y_0 \quad . \quad (3.9)$$

Dieses Ergebnis ist sicher dann instabil, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \infty$ oder $\Delta x > 2/\alpha$. Es treten jedoch bereits für $\Delta x > 1/\alpha$ Oszillationen auf, so daß das Euler-Verfahren hier nur für $\Delta x < 1/\alpha$ stabil ist. Für große Werte α muß die Schrittweite Δx also drastisch reduziert werden. Dies kann zu inakzeptabel langen Rechenzeiten führen. Für andere explizite Verfahren gilt Ähnliches.

Dies ist besonders dann katastrophal, wenn die integrierte Funktion zwei unterschiedliche „intrinsische“ Skalen enthält, von denen die größere die interessante ist. Hairer und Wanner (1987), Kapitel 1, betrachten die Differentialgleichung

$$y' = -50(y - \cos x) \quad (3.10)$$

mit der ungefähren Lösung (siehe Abb. 3.1)

$$y(x) \approx e^{-50x} + \cos x \quad . \quad (3.11)$$

Dies führt mit dem Euler-Verfahren zu

$$y_1 = (1 - 50\Delta x) y_0 + 50\Delta x \cos x_0 \quad . \quad (3.12)$$

Der erste Summand beschränkt die möglichen Schrittweiten auf $\Delta x < 1/50$. Man sieht jedoch, daß der exponentielle Anteil der Lösung, der dies verursacht, sehr schnell verschwindet. Anschließend bleibt eine Kosinusfunktion mit einer typischen Skala (der Wellenlänge) von 2π . Aus Stabilitätsgründen muß die Schrittweite jedoch stets weit unter 2π bleiben; die möglichen Schrittweiten haben nichts mit der Wellenlänge zu tun.

Differentialgleichungen, die sehr unterschiedliche Zeit- (oder Längen-) Skalen enthalten, heißen *steife Differentialgleichungen*.

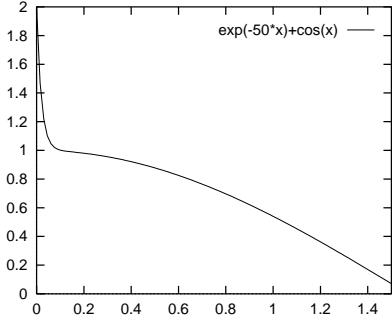


Abbildung 3.1: $y(x) = e^{-50x} + \cos x$

3.2.3 Implizite Verfahren

Sogenannte *implizite Verfahren* sind die Antwort auf steife Differentialgleichungen. Sie lösen auch die oben beschriebenen Fälle mit sinnvollen Schrittweiten.

Um ein implizites Euler-Verfahren zu erhalten, entwickelt man die unbekannte Funktion $y(x)$ um den Endpunkt x_1 und findet analog zu Gleichung (3.4) (Press et al. 1992, Kapitel 16.6)

$$y(x_0) = y(x_1) + y'(x_1)(x_0 - x_1) + y''(x^*) \frac{(x_0 - x_1)^2}{2} \quad (3.13)$$

mit $x^* \in [x_0, x_1]$. Dies kann (mit $\Delta x = x_1 - x_0$ wie oben) bis auf Terme zweiter Ordnung in Δx auch als

$$y_0 = y_1 - \Delta x f(x_1, y_1) \quad (3.14)$$

geschrieben werden. Man beachte dabei die Änderung der Indizes gegenüber (3.5). Diese Gleichung definiert implizit den gesuchten Wert y_1 .

Das implizite Euler-Verfahren liefert für die fallende Exponentialfunktion (3.7) von oben

$$y_0 = (1 + \alpha \Delta x) y_1 \quad (3.15)$$

oder

$$y_1 = \frac{y_0}{1 + \alpha \Delta x} \quad . \quad (3.16)$$

Es ist damit wegen $\alpha > 0$ für alle $\Delta x > -2/\alpha$ und wegen $\Delta x > 0$ sogar unabhängig von Δx stabil. Es ist nicht unbedingt genauer, aber es ist zumindest stabil.

Um im Allgemeinfall aus (3.14) den gesuchten Wert y_1 zu ermitteln, kann eine Newton-Iteration angewandt werden. Die Vorschrift

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \frac{F(X^{(n)})}{\frac{\partial F}{\partial X}(X^{(n)})} \quad (3.17)$$

konvergiert für geeignete Startwerte $X^{(0)}$ gegen eine Nullstelle X^* von $F(X)$.

Mit $X = y_1$ und $F(X) = y_1 - y_0 - \Delta x f(x_1, y_1)$ ergibt sich

$$y_1^{(n+1)} = y_1^{(n)} - \left[1 - \Delta x \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1^{(n)}) \right]^{-1} \cdot \left(y_1^{(n)} - y_0 - \Delta x f(x_1, y_1^{(n)}) \right) . \quad (3.18)$$

Der Ausdruck (3.18) sieht auf den ersten Blick numerisch leicht beherrschbar aus. Leider bestehen aber sowohl die Funktion $y(x)$ als auch deren Ableitung $f(x, y)$, besonders im SPH-Formalismus, aus unhandlich großen Vektoren. ($\dim y \approx 10^5$ ist Standard; gewünscht wären $\dim y \approx 10^7$.) Der Ausdruck $\partial f / \partial y$ steht dann für die Jacobi-Matrix.

Die Berechnung von $[1 - \Delta x \partial f / \partial y]^{-1}$ erfordert damit für jeden Newton-Iterations-schritt eine Matrix-Inversion¹. Dies ist sehr aufwendig.

Ausgereifte implizite Integratoren verwenden nicht das Eulersche Verfahren, sondern eines höherer Ordnung mit entsprechend höherer Genauigkeit. Die Vorgehensweise und die dabei auftretenden Probleme sind aber die gleichen.

3.2.4 Steife Differentialgleichungen in der Strahlungs-Hydrodynamik

In der Strahlungs-Hydrodynamik treten besonders in der Energiegleichung steife Terme auf.

Das Wechselspiel zwischen Strahlungsenergie und innerer Energie der Materie

Die Aborptions-Zeitskala $\lambda/c = 1/(c\bar{\sigma}'_a)$ (siehe Abschnitt 1.2.8) kann um viele Größenordnungen kleiner sein als eine typische interessante Zeitskala für die Materie, etwa h/c_s mit der Schallgeschwindigkeit c_s . Auf der Zeitskala der Strahlung können die Effekte der Hydrodynamik dann vernachlässigt werden.

Wenn zusätzlich die innere Energie der Materie gegenüber der Strahlungsenergie dominiert, kann der Absorptionsterm in der Energiegleichung der Strahlung (2.57)

$$\frac{d}{dt} J = \dots + c\bar{\sigma}'_a (aT^4 - J) \quad (3.19)$$

das System steif machen: Weil die innere Energie der Materie gegenüber der Strahlungsenergie dominiert, wirken sich Änderungen der Strahlungsenergiedichte J nur wenig auf die Temperatur der Materie T aus, die damit annähernd konstant ist. Auch der Absorptionskoeffizient $\bar{\sigma}'_a$ ist dann ungefähr konstant.

Gleichung (3.19) hat ann die oben erwähnte Form einer fallenden Exponentialfunktion plus einer Inhomogenität. Die minimalen Fluktuationen in der Strahlungsenergie müssen von einem expliziten Integrator genau verfolgt werden. So kann die typische Zeitschrittweite um Größenordnungen unter der Zeitskala bleiben, die den Beobachter interessiert.

¹Die Matrix muß nicht wirklich invertiert werden. Es reicht aus, ein lineares Gleichungssystem der gleichen Dimension zu lösen.

Der Strahlungsfluß in thermalisierten Gebieten

Der Strahlungsfluß

$$\mathbf{F} = -\frac{c}{3(\bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}'_a)} \nabla J \quad (3.20)$$

verschwindet, wenn ein Gebiet vollständig thermalisiert ist, wenn also Strahlung und Materie dort im thermodynamischen Gleichgewicht mit einer gewissen konstanten Temperatur T stehen.

Eine typische Zeitskala für den Strahlungsfluß ist die Wechselwirkungs-Zeitskala $1/(c\bar{\sigma}_s + c\bar{\sigma}'_a)$. Auch wenn der Beitrag des Strahlungsflusses zum Energiehaushalt verschwindet, muß ein expliziter Integrator seine Schrittweite noch an die Zeitskala des Strahlungsflusses anpassen.

3.2.5 Implizite Integratoren für das SPH-Verfahren

Im SPH-Verfahren ist die Jacobi-Matrix $\partial f / \partial y$ nur dünn besetzt: Ein Eintrag $\partial f_i / \partial y_j$ kann nur dann von Null verschieden sein, wenn die Stützstellen i und j miteinander wechselwirken. Sie hat jedoch im allgemeinen keine regelmäßige Struktur.² Ein impliziter Integrator muß die dünne Besetzung ausnützen, um mit vertretbarem Aufwand eine Lösung zu finden.

Unter idealen Bedingungen kann die Jacobi-Matrix mit einem Aufwand von $O(N \cdot Z^2)$ bearbeitet werden. Diese sind etwa dann gegeben, wenn die Jacobi-Matrix Bandstruktur hat. Dabei bezeichnen N die Anzahl der Stützstellen und Z die durchschnittliche Anzahl von Wechselwirkungen je Stützstelle. Dieser Aufwand liegt nur um den Faktor Z über dem Aufwand, der für die Behandlungen der Wechselwirkungen im SPH-Formalismus grundsätzlich notwendig ist. Es besteht also die Hoffnung, daß implizite Integratoren sinnvoll mit der SPH-Methode kombiniert werden können.

²Bei eindimensionalen Problemen können die Stützstellen stets entsprechend ihrer räumlichen Anordnung numeriert werden; dann erhält die Jacobi-Matrix eine Bandstruktur. In mehreren Dimensionen ist das nicht möglich.

Kapitel 4

Tests

4.1 Das Stoßrohr

Das Stoßrohr ist ein relativ einfaches System, dessen Zeitentwicklung im strahlunglosen Fall analytisch berechnet werden kann. Es bietet sich deshalb an, gerade dieses System auch zu simulieren, um die Ergebnisse der Simulation mit der analytischen Lösung zu vergleichen und dadurch die Zuverlässigkeit der Simulation zu testen.

4.1.1 Aufbau des Stoßrohres

Das Stoßrohr besteht aus einem eindimensionalen, unendlich langen Rohr, das mit Gas gefüllt ist. Zu Anfang befindet sich an der Stelle $x = 0$ eine Membran, die das Rohr in zwei Hälften teilt. Auf jeder Seite der Membran sind die Parameter des Systems (Druck, Dichte, Temperatur etc.) konstant. Das Gas befindet sich in Ruhe.¹

Um das Experiment zu beginnen, wird die Membran zum Zeitpunkt $t = 0$ instantan entfernt. Wenn der Druck in beiden Hälften des Rohres gleich ist, geschieht nichts. Im folgenden wird angenommen, daß der Druck in der linken Hälfte des Rohres (also für $x < 0$) anfangs größer ist als in der rechten Hälfte, und daß die Temperatur T anfangs auf beiden Seiten der Membran die Gleiche ist. Ferner soll natürlich immer ein ideales Fluid betrachtet werden. Die Anfangskonfiguration sieht dann qualitativ aus wie in Abbildung 4.1.

4.1.2 Qualitative Beschreibung des gesamten Stoßrohres

Im Stoßrohr bilden sich drei charakteristische Strukturen aus (siehe Abbildung 4.2):

- Eine *Stoßfront* (F) läuft mit Überschallgeschwindigkeit nach rechts (in das Gebiet niedrigen Druckes). In der Stoßfront wird das Gas komprimiert und nach rechts beschleunigt. Dabei wird Entropie erzeugt. In einem idealen Fluid hat die Stoßfront keine Längenausdehnung; die Parameter des Systems ändern sich sprunghaft.

¹Andere Möglichkeiten, ein Stoßrohr aufzubauen, bestehen etwa darin, einen Kolben mit einer gewissen Geschwindigkeit v in einem gasgefülltes Rohr zu bewegen.

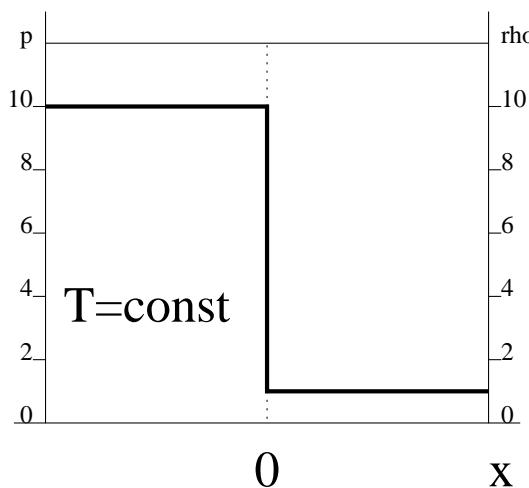


Abbildung 4.1: (schematisch) Anfangskonfiguration

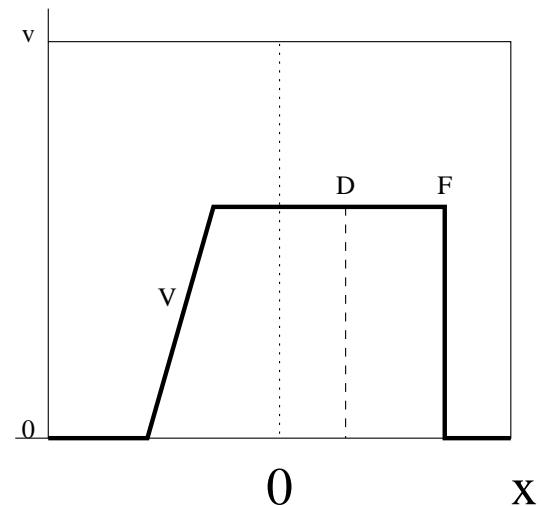


Abbildung 4.2: (schematisch) Geschwindigkeitsverteilung zu einem späteren Zeitpunkt

- Hinter der Stoßfront befindet sich eine *Kontaktdiskontinuität* (*D*). Sie bewegt sich mit der Gasgeschwindigkeit nach rechts. Die Kontaktdiskontinuität hat, wie ihr Name schon sagt, ebenfalls keine räumliche Ausdehnung. Über sie hinweg ist der Druck konstant; die anderen Parameter des Systems können sich sprunghaft ändern.
- Nach links bewegt sich eine *Verdünnungswelle* (*V*) in das Gebiet höheren Druckes. Dies ist eine ausgedehnte Struktur, in der sich die Geschwindigkeit linear ändert.

4.1.3 Analytische Lösung ohne Strahlung

Anfangsbedingungen

Zu beiden Seiten der Membran befindet sich das gleiche Gas, nämlich vollständig ionisierter Wasserstoff mit einer Temperatur von $T = 10^4$ K. Dieser hat eine mittlere Molmasse von $\mu = 0.504$ u. (Da ionisierter Wasserstoff doppelt so viele Teilchen hat wie atomarer Wasserstoff gleicher Masse, ist die Molmasse um die Hälfte kleiner.) Der Wasserstoff wird (in guter Näherung) als ideales Gas betrachtet; deshalb gilt $\gamma = 5/3$.

Auf der rechten Seite der Membran betrage die Dichte $\varrho = 10^{-8}$ kg/m³; auf der linken Seite habe sie den zehnfachen Wert. Damit herrscht auch ein Druckunterschied von 1 : 10 mit $p \approx 1.65$ Pa auf der rechten Seite.

Die Stoßrohr-Relationen

Anderson (1990) gibt in Kapitel 7.8 ein Rezept, um die Vorgänge in einem Stoßrohr analytisch zu lösen. Die Ergebnisse werden hier vorgestellt. Alle Werte werden dabei auf drei signifikante Stellen gerundet.

Die Stoßfront bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $W = 25700$ m/s nach rechts. Jeder Punkt der Verdünnungswelle bewegt sich mit der lokalen Schallgeschwindigkeit

Analytische Lösung ohne Strahlung nach $2.5 \cdot 10^6$ s:

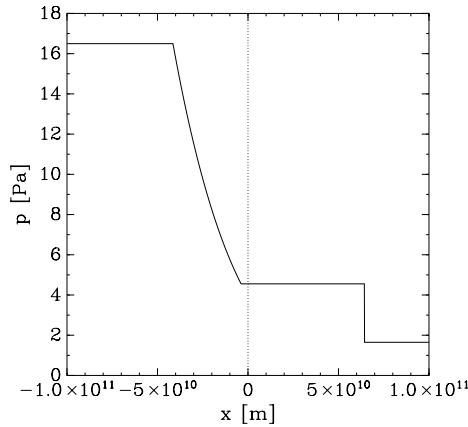


Abbildung 4.3: Druck

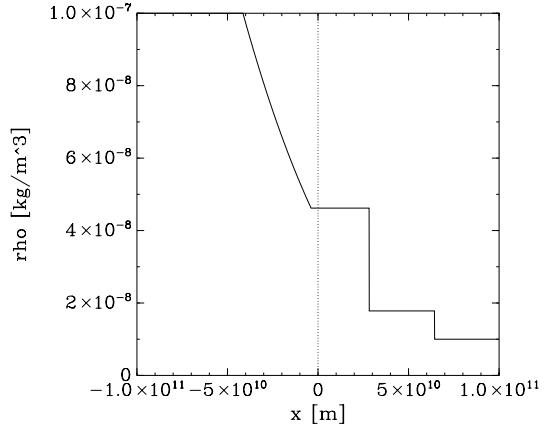


Abbildung 4.4: Dichte

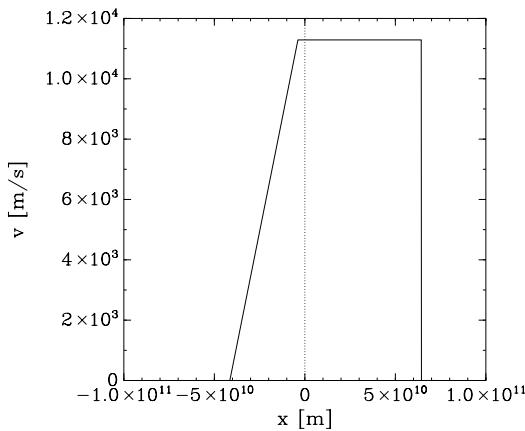


Abbildung 4.5: Geschwindigkeit

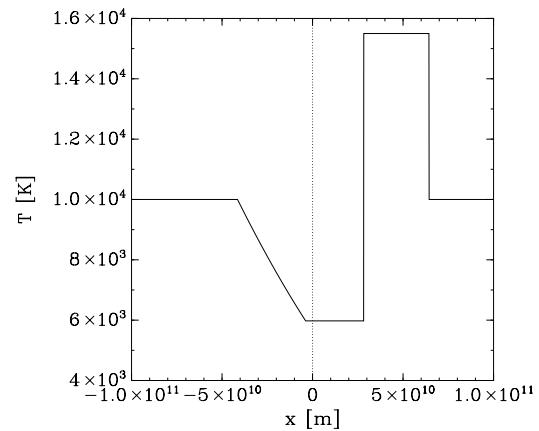


Abbildung 4.6: Temperatur

nach links, wobei sich die Schallgeschwindigkeit über die Verdünnungswelle ändert. Für die übrigen Parameter im Stoßrohr gilt:

Größe	Einheit	links von V	zwischen V und D	zwischen D und F	rechts von F
Gasgeschwindigkeit v	[m/s]	0	11300	11300	0
Druck p	[Pa]	16.5	4.55	4.55	1.65
Temperatur T	[K]	10000	5980	15500	10000
Dichte ρ	$[10^{-8} \text{ kg/m}^3]$	10	4.62	1.78	1
Schallgeschwindigkeit c_s	[m/s]	16600	12800	20600	16600

Die exakte Lösung nach $t = 2.5 \cdot 10^6$ s ist in den Abbildungen 4.3 bis 4.6 zu sehen.

4.1.4 Simulation ohne Strahlung

Die Anfangsbedingungen aus dem vorigen Abschnitt lassen sich in einer Simulation nicht exakt reproduzieren. Zum einen ist das Simulationsgebiet nicht unendlich ausgedehnt. Am Rand des Simulationsgebietes muß deshalb Vorsorge getroffen werden, daß möglichst wenig (unphysikalische!) Information vom Rand ins Innere des Simulationsgebietes gelangt. Insbesondere dürfen keine nach außen laufenden Schallwellen am Rand reflektiert werden. Ein probates Mittel ist es, die Simulation abzubrechen, sobald das Gebiet um den Rand nicht mehr glatt ist, sobald also irgendwelche physikalische Strukturen den Rand erreicht haben.

In vielen Fällen kann das Simulationsgebiet wie ein Torus fortgesetzt werden, indem gegenüberliegende Ränder verbunden werden, oder kann als Rand eine Symmetrieebene gewählt werden. In beiden Fällen ist die Fortsetzung des Simulationsgebietes über den Rand hinaus bekannt; ein Rand als solcher existiert dann nicht. Dies ist hier wegen der unterschiedlichen Drücke nicht möglich.

Das andere Problem bei der Darstellung der Anfangsbedingungen ist der unstetige Sprung an der Stelle der Membran. Da im SPH-Formalismus alle Funktionen approximiert werden, und da der maximale Gradient der SPH-Approximation f etwa f/h beträgt (h ist hier die Ausschmierlänge, siehe Abschnitt 2.1.1), kann der Sprung im SPH-Formalismus nicht dargestellt werden. Die Anfangskonfiguration muß etwas abgerundet werden.

Manchmal können anfängliche Unstetigkeiten behandelt werden, indem man die Simulation erst zu einem späteren Zeitpunkt beginnt. Dazu muß aber einerseits eine analytische Lösung bekannt sein (das ist sie meistens nicht), und andererseits muß der Sprung nach einer gewissen Zeit stetig geworden sein (das wird er im strahlungsfreien Stoßrohr nicht).

Weitere Probleme bei der Wahl der Anfangsbedingungen ergeben sich, wenn die physikalischen Anfangsbedingungen zu detailreich sind. Da eine Simulation nur ein gewisses Auflösungsvermögen hat, müssen eventuell kleine Strukturen vernachlässigt werden.

Numerische Anfangsbedingungen

Das Simulationsgebiet erstreckt sich von -10^{11} m bis $+10^{11}$ m. Es wurden 100 äquidistante Stützstellen gewählt, um das System darzustellen. Jeder wurde das gleiche Volumen von $V_i = 2 \cdot 10^9$ m (dem Abstand zweier Stützstellen) zugeordnet. Als Ausschmierlänge wurde $h = 10^{10}$ m gewählt.

Anmerkung. Die geringe Anzahl von nur 100 Stützstellen mag verwundern, läßt sie doch kein genaues Ergebnis erwarten. Dem ist auch so. Für eine Simulation mit Strahlung ist jedoch (wie früher beschrieben) ein impliziter Integrator notwendig, dessen Speicherplatz- und Zeitbedarf leider keine sehr viel bessere Auflösung zuläßt. Hier besteht noch dringend Entwicklungsbedarf.

Die den hier verwendeten SPH-Gleichungen zugrundeliegenden hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigen keine Viskosität. Da in der Stoßfront jedoch Energie dissipiert wird, wird hier eine künstliche Viskosität nach Monaghan (1992) mit den Parametern $\beta = 2$ und $\eta = 0.01$ verwendet.

Diese Anfangskonfiguration ist in den Abbildungen 4.7 und 4.8 dargestellt. Gegenüber der analytischen Anfangskonfiguration ist der Sprung bei $x = 0$ ausgeschmiert.

Anfangskonfiguration der Simulation ohne Strahlung:
 $(T = \text{const} = 10^4 \text{ K}, v = \text{const} = 0)$

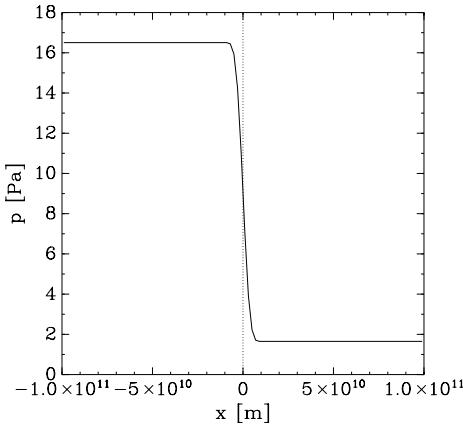


Abbildung 4.7: Druck

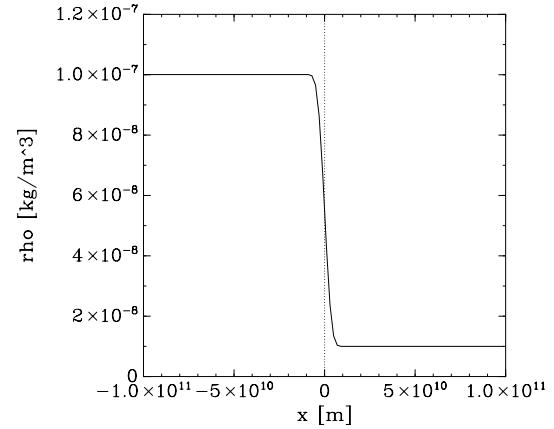


Abbildung 4.8: Dichte

Ergebnis der Simulation

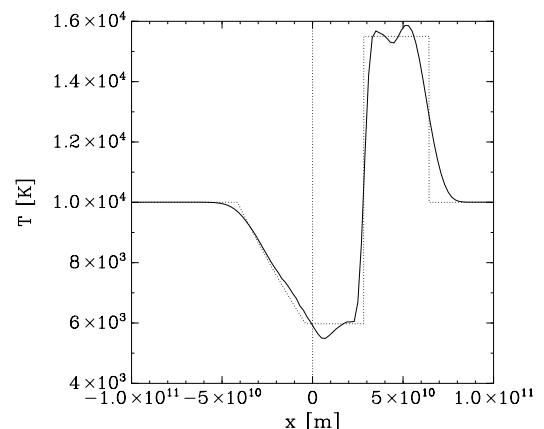
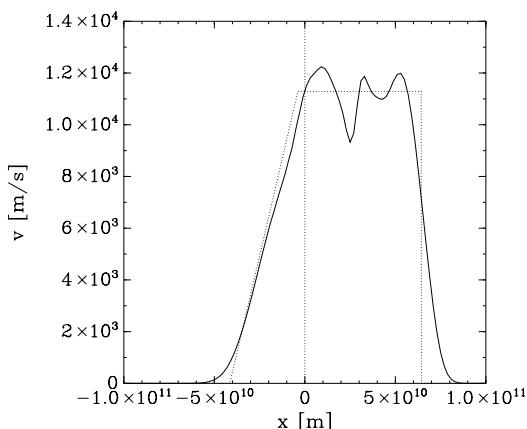
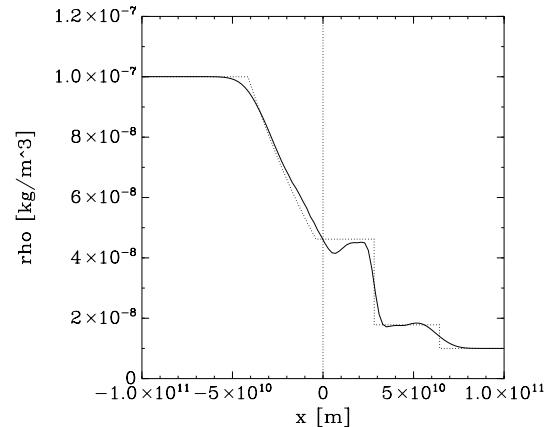
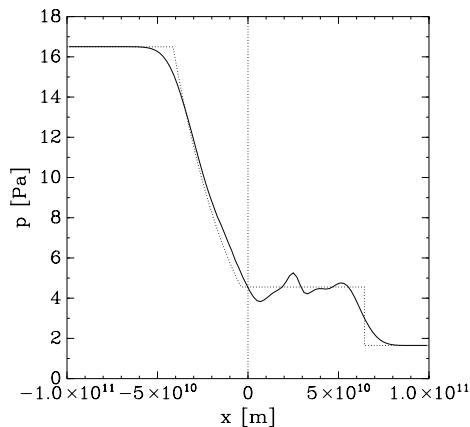
Ein Vergleich der analytischen und der numerischen Lösung findet sich in den Abbildungen 4.9 bis 4.12. Die numerische Lösung unterscheidet sich in verschiedenen Punkten von der analytischen:

- Die Stoßfront ist ausgeschmiert. Einerseits kann der Sprung in der Stoßfront im SPH-Formalismus nicht dargestellt werden, und andererseits schmiert die hier verwendete künstliche Viskosität eine Front auf eine Länge von etwa $3h$ aus (Monaghan 1992).
- Direkt hinter der Stoßfront gibt es Fluktuationen im Gas. Die Energiedissipation in der Stoßfront wird von der künstlichen Viskosität wegen der geringen Auflösung nicht gut nachgebildet.
- An der Stelle der Kontaktdiskontinuität befindet sich eine seltsame Struktur, nämlich eine lokale Erhöhung des Druckes, die zeitlich stabil ist. Diese röhrt daher, daß der Gradient des Druckes in der SPH-Näherung verschwinden kann, obwohl die Stützwerte des Druckes verschieden sind. (Letztendlich ist das auf eine innere Inkonsistenz des SPH-Verfahrens zurückzuführen.)
- Die beiden Knicke am Anfang und am Ende der Verdünnungswelle sind auf etwa $1h$ ausgeschmiert. Zusätzlich gibt es ein Überschwingen der Geschwindigkeit am Ende der Verdünnungswelle. Die analytische Lösung wird dort konstant, während die Geschwindigkeit im SPH-Formalismus in einer gedämpften Schwingung um den wahren Wert pendelt.

Die Graphen der numerischen Lösung zeigen, daß diese nicht sehr genau ist. Für exakte quantitative Aussagen über die Parameter des Systems müßte die Anzahl der Stützstellen deutlich erhöht werden. Es erscheint nicht sinnvoll, aus dieser numerischen Lösung eine Tabelle mit quantitativen Stoßrohr-Relationen wie in Abschnitt 4.1.3 zu erstellen.

Vergleich der analytischen und der numerischen Lösung ohne Strahlung nach $2.5 \cdot 10^6$ s:

Die durchgezogenen Linien sind das Ergebnis der Simulation,
die punktierten Linien die analytische Lösung.



Anfangskonfiguration der Simulation mit Strahlung:
 $(T = \text{const} = 10^4 \text{ K}, v = \text{const} = 0, \text{LTE Strahlung mit Materie})$

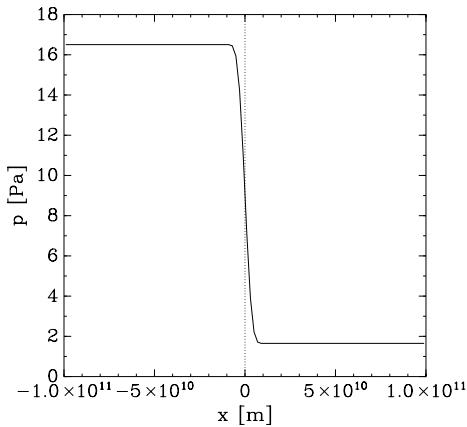


Abbildung 4.13: Gasdruck

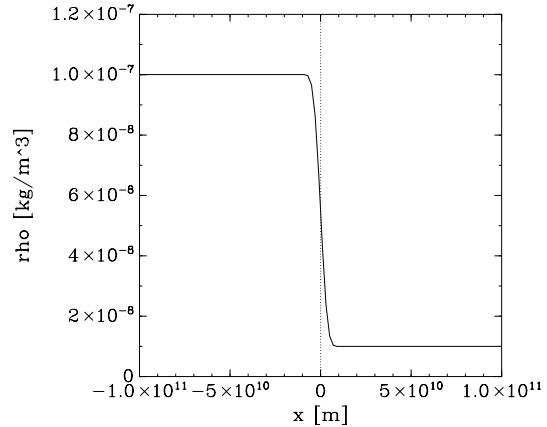


Abbildung 4.14: Dichte

Eine bessere Auflösung als die aus den Graphen ersichtliche wurde in der Simulation offensichtlich nicht erzielt.

4.1.5 Simulation mit Strahlung

Für die Simulation mit Strahlung wurden die gleichen Anfangsbedingungen wie für die Simulation ohne Strahlung gewählt, um die Ergebnisse vergleichen zu können. Eine analytische Lösung für das gesamte Stoßrohr mit Strahlung ist leider nicht bekannt, so daß der Vergleich mit der exakten Lösung entfallen muß. (Für die Stoßfront alleine gibt es allerdings eine stationäre analytische Lösung, die in Abschnitt 4.1.6 diskutiert wird.)

Während der Simulation wurden als Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Materie sowohl Thomson-Streuung als auch inverse Bremsstrahlung berücksichtigt. Die Strahlung wurde dabei in der Diffusionsnäherung aus Abschnitt 1.2.6 behandelt.

Numerische Anfangsbedingungen

Den Anfangsbedingungen aus Abschnitt 4.1.4 wurde Strahlung hinzugefügt, die im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Materie steht. Dies führt zu einer räumlich konstanten Strahlungs-Energiedichte von $J = 7.56 \text{ J/m}^3$. Der Strahlungsfluß ist zu Anfang null. Der Strahlungdruck ist anfangs $J/3 = 2.52 \text{ Pa}$ und damit von der Größenordnung des Gasdrucks. Die Anfangskonfiguration ist in den Abbildungen 4.13 und 4.14 dargestellt.

Für die Thomson-Streuung wurde $\bar{\kappa}_T = 0.040 \text{ m}^2/\text{kg}$, für die inverse Bremsstrahlung wurde $\bar{\kappa}_B = Q_B \varrho T^{-7/2}$ mit $Q_B = 8.815 \cdot 10^{18} \text{ m}^5 \text{ K}^{7/2}/\text{kg}^2$ angenommen. Die schwache Temperaturabhängigkeit von Q_B wurde vernachlässigt.

Die mittlere freie Weglänge $\lambda = 1/(\bar{\kappa}\varrho)$ (siehe Abschnitt 1.2.8) mit $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_T + \bar{\kappa}_B$ hat anfangs links bzw. rechts der Membran den Wert $2.45 \cdot 10^9$ m bzw. $2.05 \cdot 10^8$ m. Das Simulationsgebiet mit seiner Ausdehnung von $2 \cdot 10^{11}$ m ist also optisch dick mit einer optischen Tiefe von $\tau = 529$.

Vergleich der Ergebnisse mit und ohne Strahlung nach $2.5 \cdot 10^6$ s:
 Die durchgezogenen Linien sind das Ergebnis der Simulation mit,
 die punktierten Linien das der Simulation ohne Strahlung.

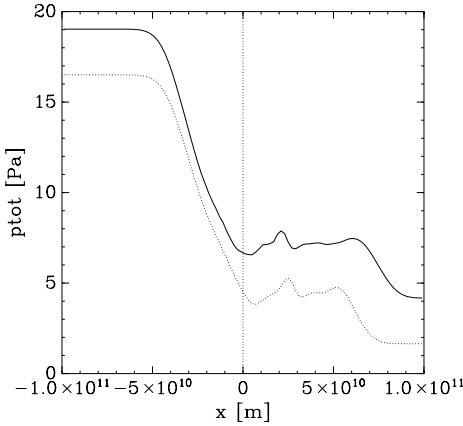


Abbildung 4.15: Gesamtdruck

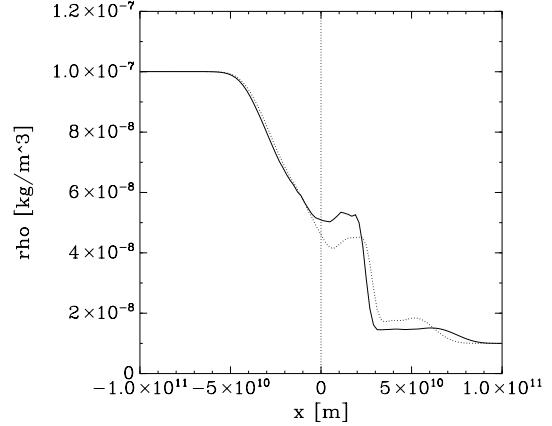


Abbildung 4.16: Dichte

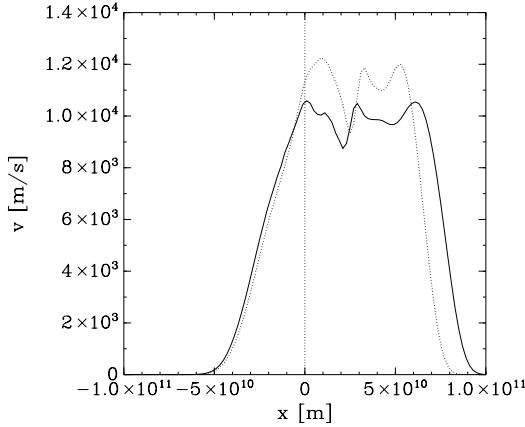


Abbildung 4.17: Geschwindigkeit

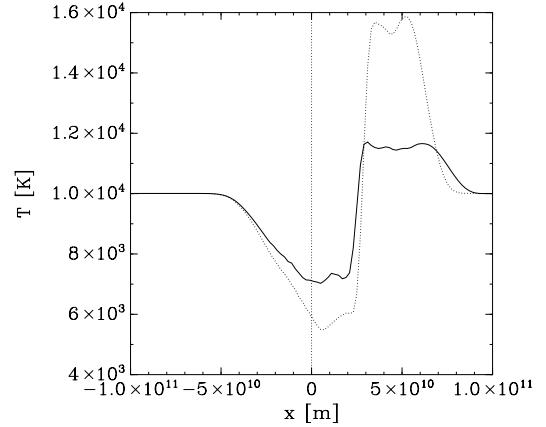


Abbildung 4.18: Temperatur

Ergebnis der Simulation

Ein Vergleich der Konfigurationen, die sich im SPH-Formalismus nach $2.5 \cdot 10^6$ s mit und ohne Strahlung ergeben hat, findet sich in den Abbildungen 4.15 bis 4.22. Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich in mehreren Punkten:

- Wegen des Strahlungsdrucks hat sich der Gesamtdruck im System erhöht. Das Verhältnis der Drücke über die Stoßfront hat sich verkleinert; der Stoß wurde also schwächer (siehe Anderson 1990, Kapitel 7).
- Die Stoßfront bewegt sich schneller als im System ohne Strahlung. Gleichzeitig bewegt sich das Gas nach der Stoßfront langsamer. Die Verdünnungswelle, die mit der lokalen Schallgeschwindigkeit nach links läuft, hat eine leicht größere Geschwindigkeit.

Ergebnis der Simulation mit Strahlung nach $2.5 \cdot 10^6$ s:

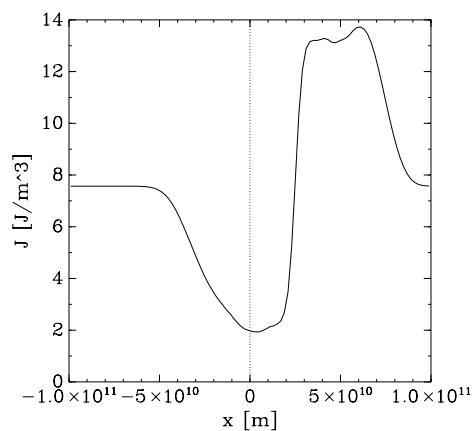


Abbildung 4.19: Strahlungs-Energiedichte

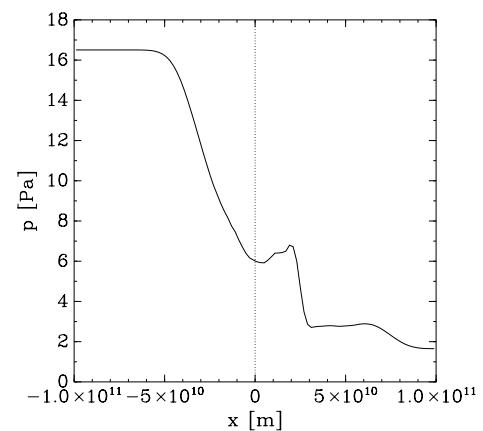


Abbildung 4.20: Gasdruck

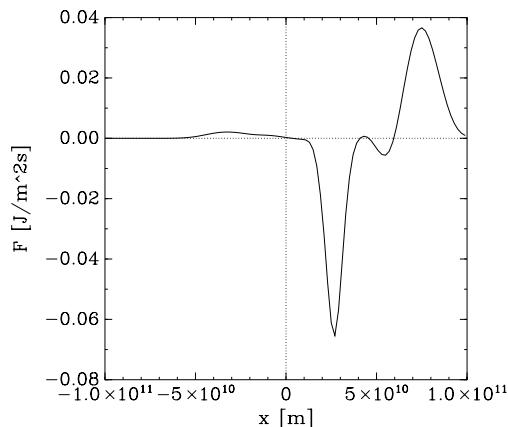


Abbildung 4.21: Strahlungsfluß

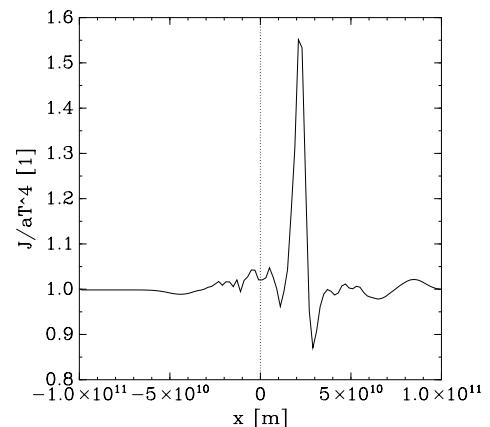


Abbildung 4.22: Abweichung vom LTE

- Die Stoßfront selbst hat die gleiche Ausdehnung wie ohne Strahlung. Sie wird nicht aufgelöst, weil ihre physikalische Ausdehnung unter der Auflösungsgrenze der Simulation liegt.
- Die Temperaturunterschiede im System sind kleiner. In der Stoßfront wird das Gas weniger erwärmt, über die Kontaktdiskontinuität hinweg besteht eine kleinere Temperaturdifferenz. Dies ist ein Effekt des Energietransports durch Strahlung, wie in Abbildung 4.21 zu sehen ist. Da der Strahlungsfluß proportional zum Temperaturgradienten ist, hat er die Tendenz, Temperaturgradienten zu verkleinern.

Bei einem schwächeren Stoß bewegt sich die Stoßfront langsamer. Offensichtlich wird die Abschwächung des Stoßes durch die Änderung des Zustandes des Systems (einem höheren Gesamtdruck und einem größeren Energieinhalt) mehr als ausgeglichen.

4.1.6 Quantitative Simulation der Stoßfront mit Strahlung

Ohne Strahlung und Viskosität hat die Stoßfront im Kontinuumsbild keine Ausdehnung. Das Kontinuumsbild gilt in der Physik nur bis zur Größenordnung der mittleren freien Weglänge der Teilchen. Darunter befindet sich das Gas nicht mehr im thermodynamischen Gleichgewicht. Nach Berücksichtigung von Strahlung oder Viskosität erhält die Stoßfront auch im Kontinuumsbild eine Ausdehnung. Im Falle der Strahlung liegt die effektive Ausdehnung in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge der Photonen.

Wenn Strahlung in der Diffusions-Näherung berücksichtigt wird, ist keine analytische Lösung für das gesamte Stoßrohr bekannt. Eine Lösung für die Stoßfront selbst kann aber unter gewissen Bedingungen angegeben werden: Es wird gefordert, daß Strahlung und Materie stets lokal im thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Es findet also keine Netto-Absorption statt. Die einzige betrachtete Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie sei Thomson-Streuung.

Die Stoßfront befindet sich stationär am Ursprung, d. h. sie wird in dem System betrachtet, in dem die Stoßfront ruht. Das Gas strömt mit Überschallgeschwindigkeit von rechts in die Stoßfront, wird abgebremst und komprimiert und strömt mit Unterschall nach links aus der Stoßfront. Durch die Effekte der Strahlung wird die Stoßfront selbst über eine unendlich Länge ausgeschmiert.

Analytische Lösung

Da Strahlung und Materie lokal im thermodynamischen Gleichgewicht stehen, gilt $J = aT^4$. Das System wird so durch die drei Variablen $\varrho(x)$, $v(x)$ und $T(x)$ beschrieben. Für die Opazität gilt $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_T = \text{const.}$

An jeder Stelle x müssen die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie gelten. Da die Lösung stationär sein soll, müssen Massenstrom, Impulsstrom und Energiestrom

überall gleich sein. Dies führt zu

$$\varrho v = \text{const} \quad (4.1)$$

$$\varrho v v + p + \frac{1}{3} J = \text{const} \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varepsilon + p + \frac{4}{3} J \right) v + F = \text{const} \quad (4.3)$$

mit

$$p = \frac{k}{\mu} \varrho T \quad (4.4)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k}{\mu} \varrho T \quad (4.5)$$

$$J = a T^4 \quad (4.6)$$

$$F = -\frac{c}{3\kappa\varrho} \frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{c}{3\kappa\varrho} 4aT^3 \frac{\partial T}{\partial x} . \quad (4.7)$$

Nach dem Einsetzen der Definitionen von p , ε , J und F ergibt dies ein Gleichungssystem in den Funktionen ϱ , v , T und $T' = \partial T / \partial x$. Es kann analytisch nach $T'(T)$ aufgelöst werden. Mit geeigneten Anfangsbedingungen (etwa im Unendlichen vor der Stoßfront) kann $T'(T)$ dann zu $T(x)$ integriert werden. Daraus lassen sich dann die übrigen Größen $v(x)$, $\varrho(x)$, $p(x)$ etc. bestimmen. Zel'dovich und Raizer (1967) diskutieren in §18 die analytische Lösung qualitativ.

Anfangsbedingungen

Als Anfangsbedingung wurde für $x \rightarrow \infty$, also in unendlicher Entfernung vor dem Stoß,

$$\varrho = 3.3 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^3 \quad (4.8)$$

$$v = -43000 \text{ m/s} \quad (4.9)$$

$$T = 30303 \text{ K} \quad (4.10)$$

$$T' = 0 \quad (4.11)$$

vorgegeben. Die Funktion $T'(T)$ ist in Abbildung 4.23, die Größen des Systems in den Abbildungen 4.24 bis 4.27 dargestellt. Die Stoßfront selbst ist unendlich dick und hat eine effektive Ausdehnung von etwa 10^{13} m .

Simulation

Das oben beschriebene System wurde mit den oben beschriebenen Anfangsbedingungen simuliert. Es wurden 1000 äquidistante Stützstellen im Bereich -10^{13} m bis $+10^{13} \text{ m}$ verwendet. Der Absorptionskoeffizient $\bar{\kappa}'_a$ wurde sehr groß gewählt, so dass Materie und Strahlung in guter Näherung im thermodynamischen Gleichgewicht waren. Es wurde keine künstliche Viskosität verwendet.

Analytische Lösung für Größen in einer stationären ausgedehnten Strahlungs-Stoßfront mit Strahlung nach 10^7 s:

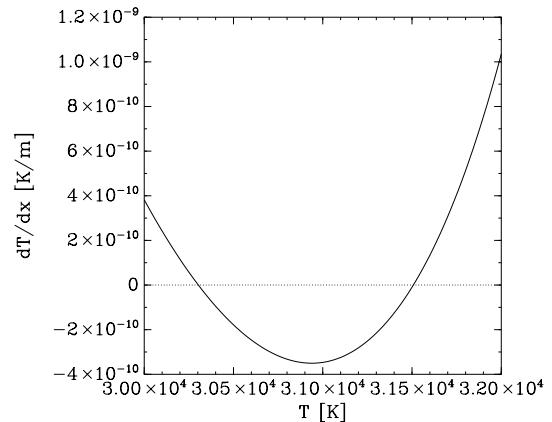
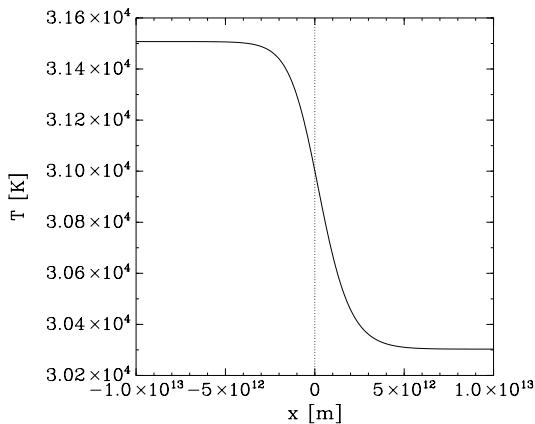
Abbildung 4.23: $T'(T)$ 

Abbildung 4.24: Temperatur

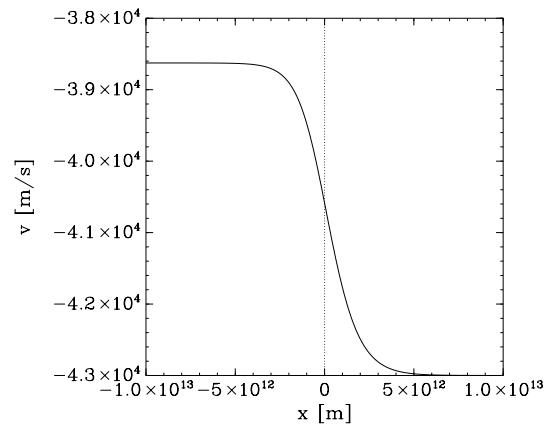


Abbildung 4.25: Geschwindigkeit

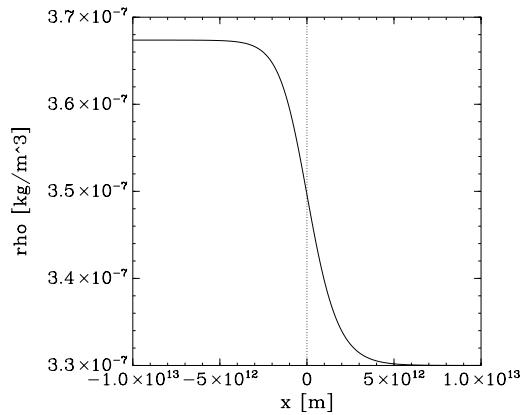


Abbildung 4.26: Dichte

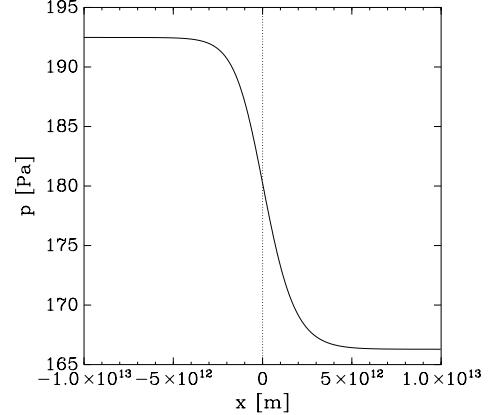


Abbildung 4.27: Druck

Numerische Lösung für Größen in einer stationären ausgedehnten Stoßfront mit Strahlung nach 10^7 s:

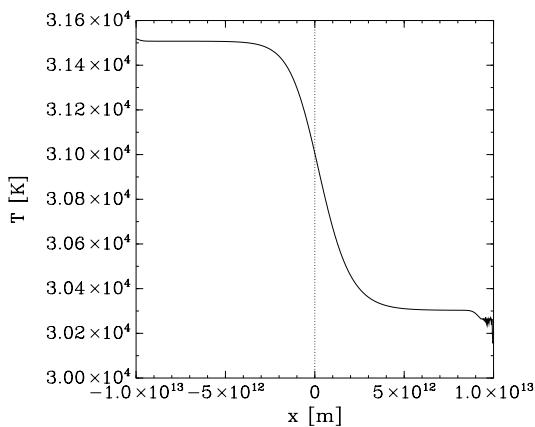


Abbildung 4.28: Temperatur

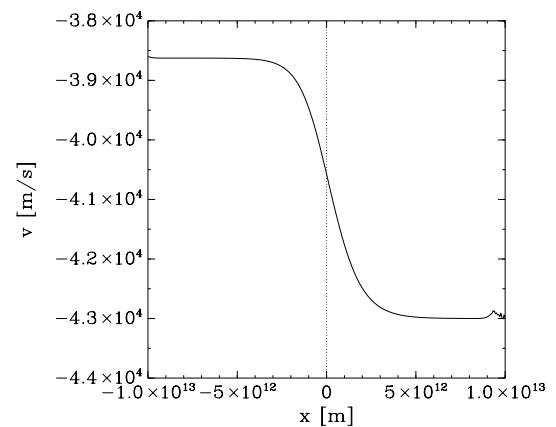


Abbildung 4.29: Geschwindigkeit

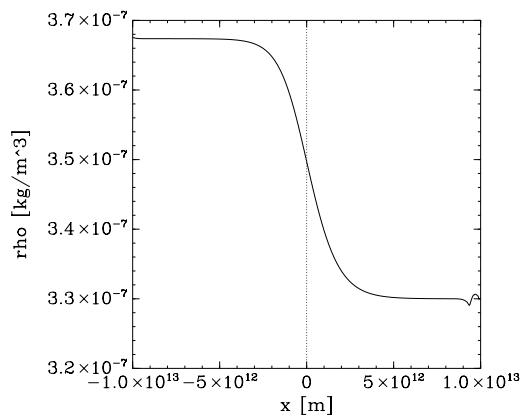


Abbildung 4.30: Dichte

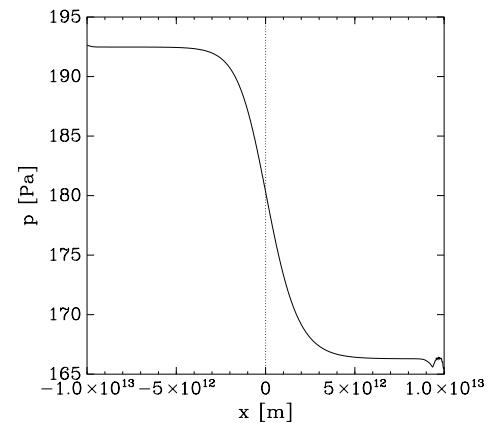


Abbildung 4.31: Druck

Das Ergebnis der Simulation nach 10^7 s ist in den Abbildungen 4.28 bis 4.31 zu sehen. In dieser Zeit hätte ein Testteilchen eine Strecke von $4 \cdot 10^{11}$ m zurückgelegt. Das entspricht leider nur einem Bruchteil der Stoßfrontdicke.

Der Rand bereitet in dieser Simulation besondere Probleme. Da ständig Materie von rechts in das Simulationsgebiet strömt, wird auch unphysikalische Information aus dem Randgebiet nach innen getragen. Die numerische Behandlung der Ränder war wohl nicht perfekt, so daß Artefakte entstanden. Mögliche Lösungen sind entweder eine Vergrößerung des Simulationsgebietes oder eine Verbesserung des Algorithmus, der die Randbedingungen im SPH-Formalismus gewährleistet.

Die betrachtete Konfiguration ist stationär. Wenn der SPH-Formalismus zuverlässig ist, muß sie auch numerisch stationär sein. In der Tat liegen die Abweichungen von der Anfangskonfiguration unter $2 \cdot 10^{-3}$, wenn der Rand nicht betrachtet wird. Das wäre ein sehr gutes Ergebnis, wenn die simulierte Zeitspanne größer wäre. Dies war wegen der Randeffekte so nicht möglich. Für ein aussagekräftiges Ergebnis müßte die simulierte Zeitspanne mindestens so groß sein, daß die Stoßfront ein mehrfaches ihrer eigenen Abmessung zurücklegt.

4.1.7 Zusammenfassung

Die Vorgänge im Stoßrohr werden qualitativ richtig wiedergegeben. Die Änderung der Zustandsgleichung durch die Einführung des Strahlungsdrucks und das Verringern von Temperaturdifferenzen durch Strahlungstransport konnten gezeigt werden.

Eine genaue quantitative Untersuchung war nicht möglich, da der Integrator zu kleine Zeitschritte wählt und damit zu langsam ist. Das Ergebnis steht nicht im Widerspruch zur analytischen Lösung.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Die Behandlung von Strahlung in optisch dünnen Medien ist mit nur geringem Aufwand möglich. In einem optisch dünnen Medium ist die mittlere freie Weglänge der Photonen mindestens so groß wie die betrachteten Objekte. Eine gute Näherung ist dann, die Strahlung instantan (also direkt nach der Entstehung) aus dem Simulationsgebiet zu entfernen.

Die Berücksichtigung von Strahlung und Strahlungstransport in optisch dicken Medien ist in gewissen Näherungen möglich. Die hier verwendete Diffusionsnäherung geht vom Grenzfall optisch sehr dicker Materie aus. Weiterhin wurde das Spektrum der Strahlung hier nicht aufgelöst. Die Abstrahlung von Oberflächen konnte nur in eindimensionalen Systemen verifiziert werden.

Gebiete, die optisch weder sehr dick noch sehr dünn sind, sowie Oberflächen, die sich selbst beleuchten, wurden nicht untersucht. Die generelle Lösung solcher Probleme erfordert die Berücksichtigung von globalen Eigenschaften des betrachteten Systems.¹ Eine sinnvolle Behandlung scheint nur im Einzelfall mittels ad-hoc-Methoden möglich zu sein.

Ein besonderes Problem stellen die Differentialgleichungen dar, die den Energieaustausch und -transport beschreiben. Es handelt sich dabei um steife Differentialgleichungen, zu deren Lösung ein impliziter Integrator notwendig ist. Dieser stellt hohe Ansprüche an Rechenzeit und Speicherplatz.

Bei vielen Testläufen hat sich ergeben, daß Strahlung und Materie im thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Die Bedingungen dafür sind eine sehr kurze Absorptionslänge der Strahlung, also etwa eine hohe Dichte oder eine niedrige Temperatur der Materie. Wenn sie gegeben sind, könnte eine Größe (etwa die Strahlungs-Energiedichte) aus dem System der Differentialgleichungen eliminiert werden, um den Integrator so zu beschleunigen.

Eine mögliche Weiterentwicklung des hier beschriebenen Verfahrens ergibt sich aus der Tatsache, daß sich Strahlung und Materie wie zwei unterschiedliche Gase verhalten, die den gleichen Raum einnehmen. Es ist nicht zwingend, sie durch die gleichen Stützstellen zu beschreiben. Unterschiedliche Stützstellen hätten den Vorteil, daß sie die Bewegungen von Strahlung und Materie, die ja nicht gleich sind, beide gleich gut verfolgen können.

Diese Diplomarbeit hat nur Grundlagen geschaffen, um Strahlungstransport in den

¹Es könnte etwa das Radiosity-Verfahren aus der Visualisierungstechnik verwendet werden. Dies erfordert aber eine starre Geometrie.

SPH-Formalismus einzubeziehen. Die hier entwickelten Verfahren sind noch nicht geeignet, in Produktionsläufen verwendet zu werden. Weitere Tests und Fortentwicklungen sind geplant.

Anhang A

Anmerkungen zur Notation

Die in dieser Diplomarbeit verwendete Schreibweise für mathematische Größen entspricht der üblichen Konvention, für Skalare, Vektoren und Tensoren unterschiedliche Schriftarten zu verwenden:

Typ	Beispiel	(Bedeutung)	Schreibweise
Skalar	ϱ	(Dichte)	<i>kursiv</i>
Vektor	\mathbf{v}	(Geschwindigkeit)	fett
Tensor	\mathbf{P}	(Drucktensor)	serifenlos

Der Einheitstensor wird mit $\mathbf{E} = \delta^{\alpha\beta}$ bezeichnet.

Ein Skalarprodukt (inneres Vektorprodukt) wird durch einen expliziten Punkt gekennzeichnet, wie in $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{\alpha} v^{\alpha} v^{\alpha}$.

Ein Tensorprodukt (äußeres Vektorprodukt) wird nicht durch einen Operator gekennzeichnet, also $\mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = v^{\alpha} v^{\beta}$.

Ein verjüngter Tensor wird wie ein Skalarprodukt behandelt, also $\mathbf{v} \cdot \mathbf{P} = \sum_{\alpha} v^{\alpha} P^{\alpha\beta}$.

Eine Funktionen f wird, wie in der Physik üblich, manchmal auch mit $f(x)$ bezeichnet, obwohl dies mathematisch nicht korrekt ist. Aus dem Kontext geht jeweils hervor, ob damit dann die Funktion oder der Funktionswert gemeint ist.

Literaturverzeichnis

- John D. Anderson. *Modern Compressible Flow*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1990.
- I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1991.
- H. Fischer und H. Kaul. *Mathematik für Physiker*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1990.
- Herbert Goldstein. *Klassische Mechanik*. Aula Verlag, Wiesbaden, 1989.
- Ernst Hairer und Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1975.
- P. Lancaster und K. Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Math. Comp.*, 37:141–158, 1981.
- L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. J.*, 82: 1013–1024, 1977.
- Dimitri Mihalas und Barbara Weibel Mihalas. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Oxford University Press, New York, 1984.
- J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 30: 543–574, 1992.
- Frank Ott. Smoothed Particle Hydrodynamics: Grundlagen und Tests eines speziellen Ansatzes für viskose Wechselwirkungen. Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1995.
- G. C. Pomraning. *The Equations of Radiation Hydrodynamics*. Pergamon press, Oxford, 1973.
- William H. Press, Saul A. Teukosky, William T. Vetterling, und Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- H. Riffert. A general eulerian formulation of the comoving-frame equation of radiative transfer. *Astrophys. J.*, 310:729–732, 1986.

George B. Rybiki und Alan P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. John Wiley & Sons, New York, 1979.

Roland Speith. Fundierung und Weiterentwicklung der SPH-Methode anhand astrophysikalischer Beispiele. Dissertation, Universität Tübingen (forthcoming), 1998.

Ya. B. Zel'dovich und Yu. P. Raizer. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, volume II. Academic Press, New York and London, 1967.

Dankeschön

Ich möchte mich ganz herzlich bei Priv.-Doz. Harald Riffert bedanken, der meine Diplomarbeit betreut hat, bei Prof. Dr. Hanns Ruder, der mir diese Arbeit ermöglicht hat, bei Dr. Ute Kraus, Frank Ott und Roland Speith für ihre immerwährende Hilfsbereitschaft und natürlich bei Frau Meyer, der Seele dieses Institutes.